Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 2 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jacobi-Matrizen, Kettenregel, Richtungsableitungen Rotation, Divergenz, Taylor-Polynome (1.Teil)

Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Jacobi-Matrizen

Sei $\quad f : D \to \mathbb{R}^m \,, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$ und

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f}$ ist stetig/part.diffbar/stetig part.diffbar $\iff$ Jede Komponente f_i von $\boldsymbol{f}$ ist stetig/part.diffbar/stetig part.diffbar. Die Definition der Differenzierbarkeit kann wörtlich übertragen werden.

Im Falle der Existenz definiert man die **Ableitugs-/Jacobi-Matrix** von $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \text{grad}\, f_1(\boldsymbol{x}) \\ \ldots \\ \text{grad}\, f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Beispiel A1: $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ f_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x + 3yz \\ y^2 + z^2 \\ x^2 + 2y \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) =$

Im Fall $m = n$: **Funktionaldeterminante von f** $:=$ det $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Wichtig bei Koordinatentransformation!

Im obigen Beispiel:

$|\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y,z)| :=$ det $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y,z) =$ det

Kettenregel: $D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}(D) \to \mathbb{R}^k$

$\Longrightarrow \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^k \wedge$

$$J(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,.$$

Beispiel A2: $f(x, y) := \cos(x)e^{2y}, \quad \boldsymbol{g}(t) := (2t^2, 1 + t)$

$\boldsymbol{h}(x, y) := \boldsymbol{g}(f(x, y)) = \boldsymbol{g} \circ f(x, y) =$

Natürlich kann man hier direkt ableiten

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{g} \circ f)(x, y)) =$

Alternativ: Kettenregel

$f(x,y) := \cos(x)e^{2y} \implies \boldsymbol{J}f(x,y)) =$

$\boldsymbol{g}(t) := (2t^2, 1+t) \implies \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t)) =$

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{h}(x,y)) =$

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{h}(x,y) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{g} \circ f)(x,y)) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) =$

Wichtiges Beispiel: $\frac{d}{dt}s(t,x(t),y(t))$

Sei wie oben $x(t)=2t^2$, $y(t)=1+t$

Definiere $g: \; t \; \mapsto \; \big(t,x(t),y(t)\big)$

$s: \big(t,x,y\big) \; \mapsto \; s(t,x,y)$

Zum Beispiel: $s(t,x,y)=tx+t^2yx^2$

Dann ist mit $f(t)=s\circ g(t)$:

$$\frac{d}{dt}s(t,x(t),y(t)) = \; \frac{d}{dt}s\circ g(t) \; = \; \boldsymbol{J}s(g(t))\cdot \boldsymbol{J}g(t)$$

$$\boldsymbol{J}s(t,x,y) \; = \; (s_t,s_x,s_y), \qquad\qquad \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t)=(1,\dot{x}(t),\dot{y}(t))^T$$

$$\frac{d}{dt}s(t,x(t),y(t)) = \; (s_t,s_x,s_y)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}$$

In unserem Beispiel: $g(t) = \big(t, x(t), y(t)\big) = \big(t, 2t^2, 1+t\big)$

$\dot{x}(t) = (2t^2)_t = 4t, \qquad \dot{y}(t) = (1+t)_t = 1$

$s(t,x,y) = tx + t^2yx^2$

$\frac{\partial}{\partial t} s(t,x,y) = s_t = (tx + t^2yx^2)_t =$

$s_x = (tx + t^2yx^2)_x = \qquad s_y = (tx + t^2yx^2)_y =$

$\frac{d}{dt} s(t, x(t), y(t)) = s_t + s_x \cdot \dot{x} + s_y \cdot \dot{y}$

Richtungsableitungen

Letzte HÜ: Ableitung einer Funktion $D \subset \mathbb{R}^n, \quad f : D \to \mathbb{R}$ in Richtung der 1., 2., 3, ... Koordinate.

Jetzt allgemeiner: Sei $\quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{a}\| = 1$ und $\boldsymbol{x}_0 \in D$.

Frage: Wie ändert sich der Wert von f, wenn ich von $\boldsymbol{x}_0$ aus ein wenig in Richtung $\boldsymbol{a}$ gehe?

$$f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}_0) + ? \qquad h \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}_0 + th \cdot \boldsymbol{a} \in D, \forall t \in [0,1]$$

Definiere: Richtungsableitung von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ bei $\boldsymbol{x}_0$

$=$ Änderungsrate von f in Richtung $\boldsymbol{a}$

$$\boxed{\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) := \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h}}$$

Ist $\mathrm{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ positiv, so werden die Funktionswerte ausgehend von x_0 bei einem hinreichend kleinen positiven Schritt in Richtung $\boldsymbol{a}$ größer. (Anstiegs- / Aufstiegsrichtung)

Ist $\mathsf{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ negativ, so werden die Funktionswerte ausgehend von x_0 bei einem hinreichend kleinen positiven Schritt in Richtung $\boldsymbol{a}$ kleiner. (Abstiegsrichtung)

Vorlesung: $\boxed{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) \; = < \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a} >.}$

Beweis: Kettenregel. Siehe Vorlesung:

Setze: $\boldsymbol{g}(h) := \boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
und $\qquad z(h) := f(\boldsymbol{g}(h), \quad z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Dann ist

$$\boldsymbol{g}(h) = \begin{pmatrix} x_{0,1} + ha_1 \\ x_{0,2} + ha_2 \\ \vdots \\ x_{0,n} + ha_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(h) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

und im Falle der Existenz nach Kettenregel:

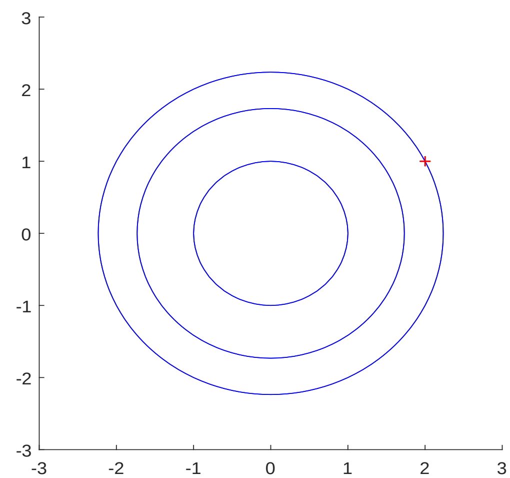
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) \; = \; \boldsymbol{J}(f(\boldsymbol{g}(0)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(0) = \mathsf{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}.}$$

Konkretes Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Für $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, $\boldsymbol{x}_0 = (2, 1)^T$ gilt:

  $D_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}$

  $$= (2x, 2y)|_{\boldsymbol{x}_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4, 2) \cdot \binom{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}6 = 3\sqrt{2}\,.$$



$\boldsymbol{a}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ **lokal** eine Aufstiegsrichtung

- Für $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$, $\boldsymbol{x}_0 = (2,1)$ gilt:

  $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{x}_0) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)^T \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4,2) \cdot \binom{-1}{1} = -\sqrt{2}.$

  $\boldsymbol{u}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ eine Abstiegsrichtung.

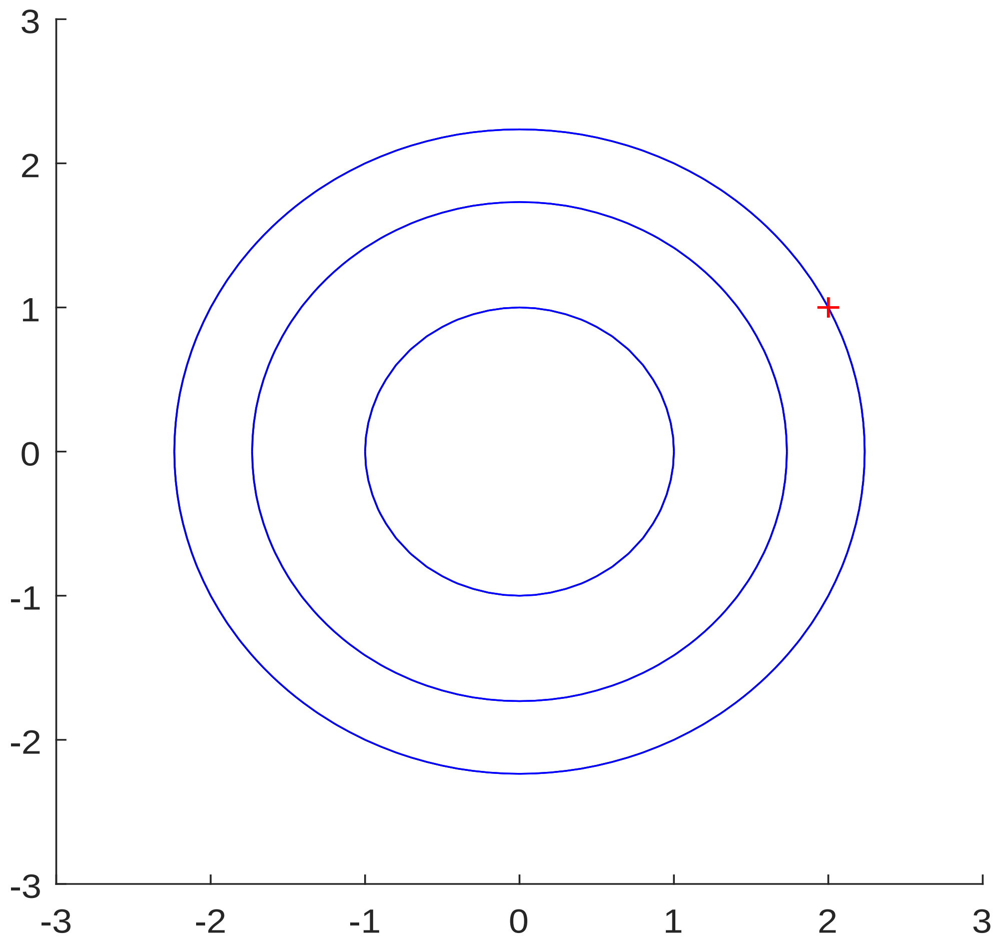
  $f(x,y) = x^2 + y^2\,, \qquad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$

  Wert in $\boldsymbol{x}_0$: also $f(2,1) = 5$

  Wert in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + 2\sqrt{2}\boldsymbol{u} =$

  $f(0,3) = 9.$

  Wie geht das denn? $\boldsymbol{u}$ war doch Abstiegsrichtung!


3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

Zu H1: Analog zu Höhenlinien im $\mathbb{R}^2$ definiert man für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ die Niveaumenge/Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ eines Punktes $\boldsymbol{x}_0$ als die Menge der Punkte, die den gleichen Funktionswert haben, wie $\boldsymbol{x}_0$:

$$N_{\boldsymbol{x}_0} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \, : \, f(\boldsymbol{x}) = \, f(\boldsymbol{x}_0)\right\}$$

Beispiel: $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Niveauflächen: Kugelschalen um Null

Gleichung für Niveaufläche in $\boldsymbol{x}_0 = \, (4, 3, 12)$

Taylorpolynome

Zur Erinnerung: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ z.B. $f\,:\,(x,y,z)^T \;\mapsto\; f(x,y,z)$

Erste partielle Ableitungen $--\;>$ **Gradient** von f

grad $f(\boldsymbol{x}) := (f_{x_1}(\boldsymbol{x}),\,\cdots\,, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\,)$

In unserem Beispiel also mit $\boldsymbol{x} = (x,y,z)^T$

$$\textbf{grad}\; f(x_0,y_0,z_0) \;=\; (f_x(x_0,y_0,z_0),\; f_y(x_0,y_0,z_0)\,, f_z(x_0,y_0,z_0))$$

Hessematrix von f:
Matrix der zweiten Ableitungen $H_{ij}(x, y) = f_{x_i x_j}$

In unserem Beispiel also mit $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$

$$Hf((x_0, y_0, z_0)) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{xz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{zx}(x_0, y_0, z_0) & f_{zy}(x_0, y_0, z_0) & f_{zz}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

f 2-mal stetig diff.bar $\Longrightarrow$ Hessematrix ist symmetrisch!

Noch mehr Erinnerungen: im $\mathbb{R}^1$:

Taylorpolynom 0.ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0: $T_0(x) = f(x_0)$

Taylorpolynom 1.ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T_0(x) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylorpolynom 2.ten Grades:

$$\begin{aligned} T_2(x) = & \ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ & = T_1(x) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ & = T_1(x) + \frac{1}{2!} (x - x_0) f''(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

NEU: im $\mathbb{R}^n$: Entwickle $f(\boldsymbol{g}(h))$, $\boldsymbol{g}(h) := \boldsymbol{x}_0 + h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$f : D \to \mathbb{R}, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$

$$T_0 = f(\boldsymbol{x}_0), \qquad T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

<u>$D \subset \mathbb{R}^2$:</u>

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \text{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) =$$

$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

<u>$D \subset \mathbb{R}^3$:</u> analog:

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$
$$+ f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Also $T_0 + \sum$ aller ersten Ableitungen $\times$ entsprechender Schrittweiten.

$\underline{D \subset \mathbb{R}^1:}$ $\qquad T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!}\,(x - x_0) f''(x_0)(x - x_0).$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^n:}$ $\qquad T_2(\boldsymbol{x}) = T_1(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^T\, Hf(\boldsymbol{x}_0)\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$

$\underline{D \subset \mathbb{R}^2:}$

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$= T_1(x,y) + \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(x_0,y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x - x_0)(y - y_0) \right.$$

$$\left. + f_{yx}(x_0,y_0)(y - y_0)(x - x_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y - y_0)^2 \right]$$

Also $T_2 = T_1 + \dfrac{1}{2!} \sum$ 2-te Ableitungen $\times$ entsprechende Schrittweiten.

Für C^2-Funktionen gilt $f_{xy} = f_{yx}$ und damit

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = f(x_0,y_0) \, + \, f_x(x_0,y_0)(x-x_0) \, + \, f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ + \, \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \, + \, 2f_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0)(x-x_0) \right. \\ \left. + \, f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Beachtet man noch:

$$\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{(2-2)!2!} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{(2-1)!1!} = 2$$

so kann man T_2 auch schreiben als:

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2!}\left[\binom{2}{2} \, f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \right. \\ \left. + \binom{2}{1} f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \binom{2}{0} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x,y) : x^2 + y^2 + \sin(x-y)$, $\qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

$T_0(x,y) =$

$f_x(x,y) =$

$f_y(x,y) =$

$$T_1(x,y) =$$

$f_{xx}(x,y) =$

$f_{xy}(x,y) =$

$f_{yx}(x,y) =$

$f_{yy}(x,y) =$

$$T_2(x,y) =$$

Und der Fehler $|f(x,y) - T_2(x,y)|$?

Im $\mathbb{R}^1$:

$$T_3(x) = T_2(x) + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

und Fehlerabschätzung:

$$|f(x) - T_2(x)| = \left|\frac{1}{3!} f'''(\alpha)(x - x_0)^3\right|$$

Im $\mathbb{R}^2$:

$T_3(x, y) = T_2(x, y) + \frac{1}{3!} \sum$ 3-te Ableitungen in $\binom{x_0}{y_0}$ $\times$ entsprechende Schrittweiten.

Wie viele dritte Ableitungen gibt es?

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) + \frac{1}{3!}\left[\binom{3}{0} f_{xxx}\binom{x_0}{y_0}(x-x_0)^3 + \binom{3}{1} f_{xxy}\binom{x_0}{y_0}(x-x_0)^2(y-y_0)\right.$$
$$\left.\binom{3}{2} f_{xyy}\binom{x_0}{y_0}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \binom{3}{3} f_{yyy}\binom{x_0}{y_0}(y-y_0)^3\right]$$

Fehler:

Also

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \tfrac{1}{3!}\cdot 2^3 \cdot C \cdot \left\| \tbinom{x}{y} - \tbinom{x_0}{y_0} \right\|_\infty^3$$

Mit $C =$ Obere Schranke für Beträge aller dritten Ableitungen in allen Zwischenstellen.

Beispiel: $f(x,y): x^2 + y^2 + \sin(x-y), \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

Sei Fehler gesucht für $-0.5 \leq x \leq 0.5$ und $-0.4 \leq y \leq 04$

$f_{xx}(x,y) = \; 2 - \sin(x-y)$

$f_{xy}(x,y) = \sin(x-y)$

$f_{yx}(x,y) = \sin(x-y)$

$f_{yy}(x,y) = \; 2 - \sin(x-y)$

Dritte Ableitungen:

| Beträge der 3. Ableitungen | $=$

$|f(x,y) - T_2(x,y)|$

Divergenz und Rotation

Gegeben: Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$. D.h.

$$\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix}$$

Dann definiert man

$$\textbf{Divergenz von } \boldsymbol{f} : \text{div}\, \boldsymbol{f}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x_1, \cdots, x_n)$$

<u>n=2</u>

$$\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \qquad \text{div}\, f(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)$$

<u>n=3:</u> $\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\ y,\ z) \\ f_2(x,\ y,\ z) \\ f_3(x,\ y,\ z) \end{pmatrix}$,

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,\ y,\ z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,\ y,\ z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,\ y,\ z)$$

Bei Strömungs- / Flußproblemen: Quelldichte

Im Fall $n = 3$ definiert man noch die **Rotation** bzw. **Wirbeldichte**

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,\ y,\ z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,\ y,\ z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,\ y,\ z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,\ y,\ z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,\ y,\ z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,\ y,\ z) \end{pmatrix}$$

Ebene Strömungen können in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet weden: <u>n=2</u>

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\ y) \\ f_2(x,\ y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \tilde{\boldsymbol{f}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\ y) \\ f_2(x,\ y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $\tilde{\boldsymbol{f}}$ erhält man die Rotation: $(0,\ 0,\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,\ y) - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,\ y))^T$. Man schreibt daher abkürzend für $n = 2$:

$$\text{rot}\, \boldsymbol{f}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,\ y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,\ y)$$

Später: Potentiale, Arbeitsintegrale, etc.

Beispiel:

Gegeben das Geschwindigkeitsfeld

$$\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon \dfrac{x}{r^2} \\ \epsilon \dfrac{y}{r^2} \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

einer zweidimensionalen Strömung. Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ sowie $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

Berechnen Sie die Quelldichte div $(\boldsymbol{v})$ und die Wirbeldichte rot $(\boldsymbol{v})$

$$(v_1)_x = \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \epsilon\frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \epsilon\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

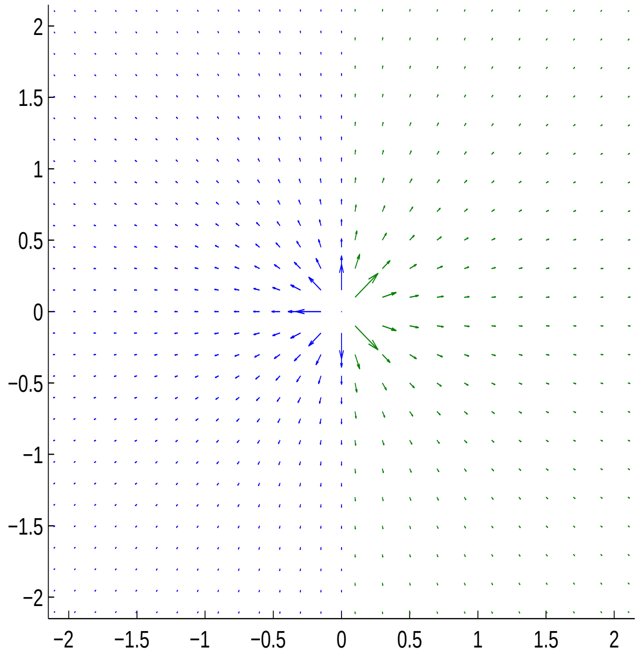
Analog:

$$(v_2)_y = \epsilon\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und damit div $(u,v) = (v_1)_x + (v_2)_y = 0.$

$$(v_1)_y = \epsilon\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (v_1)_x = \epsilon\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

und damit rot $(u,v) = (v_2)_x - (v_1)_y.$



2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2