Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

WiSe 2020/2021

Hörsaalübung 1 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Höhenlinien, partielle Ableitungen, Gradienten, höhere Ableitungen, Hesse-Matrix

Die Nutzung der Videoaufzeichnung ist eine Serviceleistung seitens der TUHH bzw. der dozierenden Person. Aus der Nutzung bzw. Nichtnutzung können gegenüber der TUHH bzw. der dozierenden Person keine Ansprüche hergeleitet werden.

Ohne die vorherige schriftliche Zustimmung der dozierenden Person dürfen weder die Präsentation noch der darin zur Verfügung gestellte Inhalt (insbesondere auch grafische Abbildungen, Audio- und Videosequenzen, HTML-Codes, Buttons und Text) kopiert, nachgedruckt, veröffentlicht, versandt, übertragen oder in irgendeiner Weise verbreitet oder vertrieben werden. Ausdrücklich zugelassen ist jedoch die Herstellung einer einzelnen Kopie zur ausschließlichen persönlichen, nicht kommerziellen Verwendung , jedoch nur unter der Voraussetzung, dass Inhalt hierdurch nicht verändert werden und alle Hinweise auf Urheberrechte, Patente, Warenzeichen und sonstigen Schutzrechten auch auf den hergestellten Kopien enthalten sind oder ein entsprechender Hinweis dort eingefügt wird, sofern es sich um Ausschnitte handelt.

Es wird keine Haftung übernommen: - für den Inhalt, insbesondere für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität der Informationen - dafür, dass die Nutzung jederzeit ohne Unterbrechung ermöglicht wird. - für Schäden, die durch unrichtige, unvollständige, unterbliebene oder zeitlich verzögerte Abruf der Aufzeichnung entstanden sind - für direkte oder indirekte Schäden, die in Zusammenhang mit der Nutzung bzw. Nichtnutzung der Videoaufzeichnungen stehen (könnten).

Die TUHH bzw. die dozierende Person behält sich das Recht vor, Teile des Angebots oder das gesamte Angebot ohne gesonderte Ankündigung zu verändern, zu ergänzen, zu löschen oder die Veröffentlichung zeitweise oder endgültig einzustellen.

Die ins Netz gestellten Kopien der Dateien sollen nur die Mitarbeit erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung/im Video gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Analysis III (ANA) / Differentialgleichungen I (DGL)

Organisation/Hörsaalübung: Hanna Peywand Kiani
Bei Fragen: 040 428384940 / StudIP / e-mail

Informationen zum Ablauf von Mathe III: Info Mathe III

Übungen: Im wöchentl. Wechsel DGL/ANA. Informationen unter:

Info Übungen
Anmelddung erforderlich!

Hörsaalübungen: im wöchentl. Wechsel ANA/DGL :
Brücke zwischen Vorlesung und Übung
Problem: HÜ Dienstag vor Vorlesungen Do/Fr und nur 10 Übungswochen statt 13.

Klausur: modular DGL / ANA, Aufgaben überwiegend wie Übungen

Matlab: Sehr nützlich in Mathe III und später für Sie!

Analysis III: Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$

Was wir schon kennen:

- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ (Analysis I,II).
- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, f linear, also $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ (Lineare Algebra I,II).
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, Kurve (Analysis II).

Ana III: beliebiges n und m. Urbild meist 2 oder 3-dimensional

Zur Erinnerung: Kurve = stetige Funktion $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_m(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_m(t) \end{pmatrix}$$

Mit $\dot{\mathbf{c}}$ gerechnet: Länge, Masse, Trägheitsmoment, etc.

Mit Ableitungen in Ana I gerechnet: Minimum, Maximum, polynomiale Näherung (Taylor), $\cdots$

Was ist aber die Ableitung wenn Urbild mehrdimensional?

Wie kann man sich so eine Funktion vorstellen?

Zunächst $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$

Beispiele:

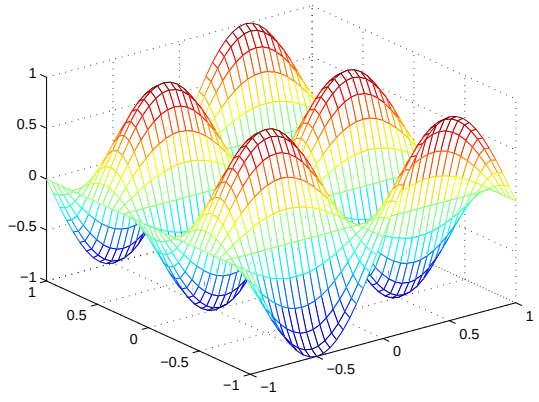
Temperatur an einzelnen Punkten einer Herdplatte,

Für ein Stück der Erde (näherungsweise eben, also Erdkrümmung vernachlässigt) Höhe über dem Meeresspiegel oder Luftdruck.

Wie kann man das veranschaulichen?

Veranschaulichung:

• Als Fläche $(x, y, f(x, y))^T \in \mathbb{R}^3$ (Modell einer Landschaft)



$$f_4(x, y) = \cos(2\pi y) \sin(\pi x)$$

oder

• Mit Hilfe von **Höhenlinien** = Kurven auf denen f konstant ist. Bekannte Beispiele: Höhe über dem Meeresspiegel, Äquipotentiallinien, Isobaren

Isobaren

Beispiel 1: $z = f(x,y) = \exp\left(-(x^2 + y^2)\right),$

Höhenlinien:

$$\exp\left(-(x^2+y^2)\right) = K \Longleftrightarrow -(x^2+y^2) = \ln(K) =: c$$

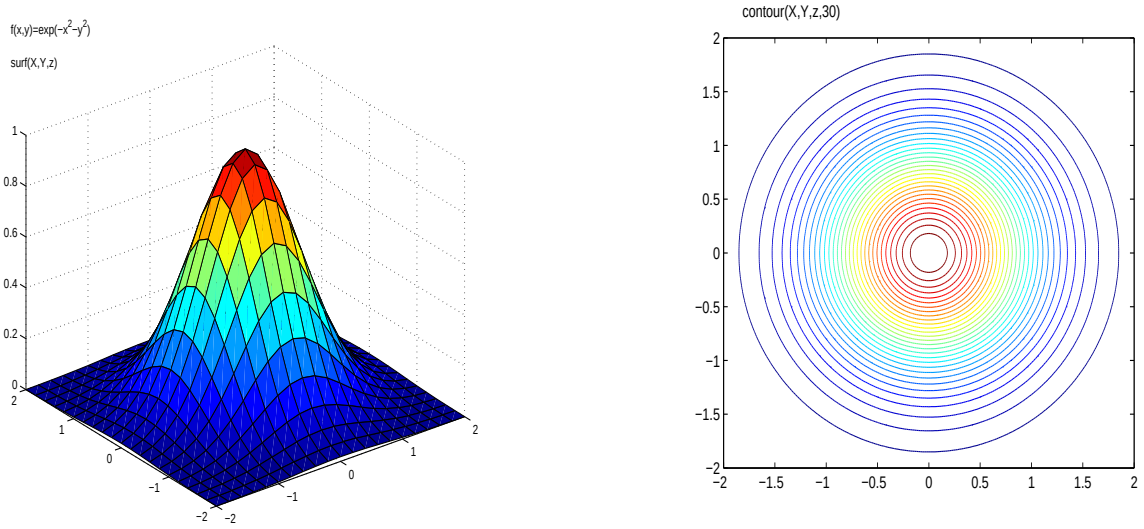


Abbildung 1: Höhenlinien : manuell eingetragen

Beispiel 2: $z = f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$.

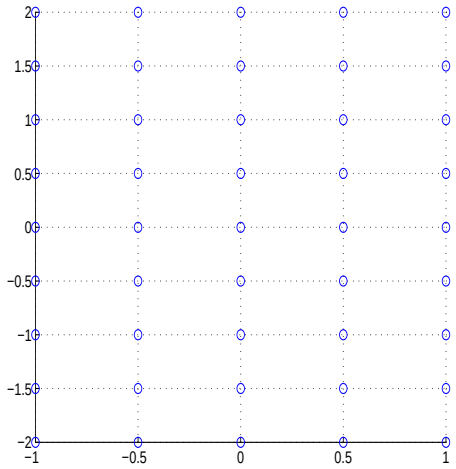
Und was, wenn es komplizierter wird?

Aus 1D bekannt: Lineare Interpolation

Ziel: Veranschaulichung/Auswertung einer Funktion $z = f(x, y)$ auf einem x, y Gitter mit $x-$ bzw. $y-$Unterteilung :

$x : x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \cdots, x_n$ hier $x_0 = -1$, $h = 0.5$, $x_n = 1$

$y : y_0, y_0 + k, y_0 + 2k, \cdots, y_m$ hier $y_0 = -2$, $k = 0.5$, $y_m = 2$



Es folgen **Ausgewählte MATLAB Befehle**
Alternativ: ez-Befehle, zum Beispiel ezsurf, ezplot etc. Informieren Sie sich bei Bedarf mittels help ezsurf, help ezplot, etc.

MATLAB–Befehle:

```
>> x=[-1 : 0.5 : 1] ;                    Hier wird ein x bzw.
>> y=[-2 : 0.5 : 2] ;                    y-Vektor erzeugt
```

Die Funktionswerte sollen für jede Kombination der $x, y-$Werte berechnet und geplottet werden. Das geht einfach mit:

```
>>  [X,Y]=meshgrid(x,y);     Hier wird ein Gitter von
x,y-Werten erzeugt
```

Funktionsauswertung:

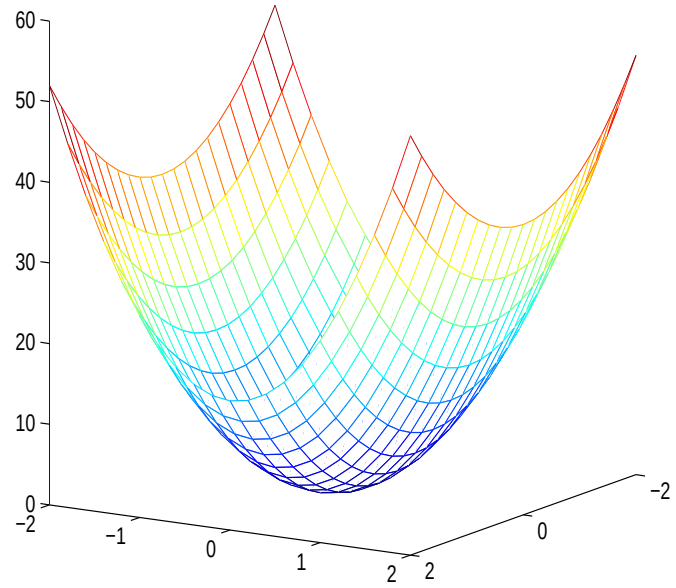
```
>>  z = 4*X.*X + 9*Y.*Y;
```

Beachten Sie die Vektoroperation : .*
MATLAB muss schon wissen, dass komponentenweise multipliziert werden soll!!

Veranschaulichung als Netz

Befehlsfolge:

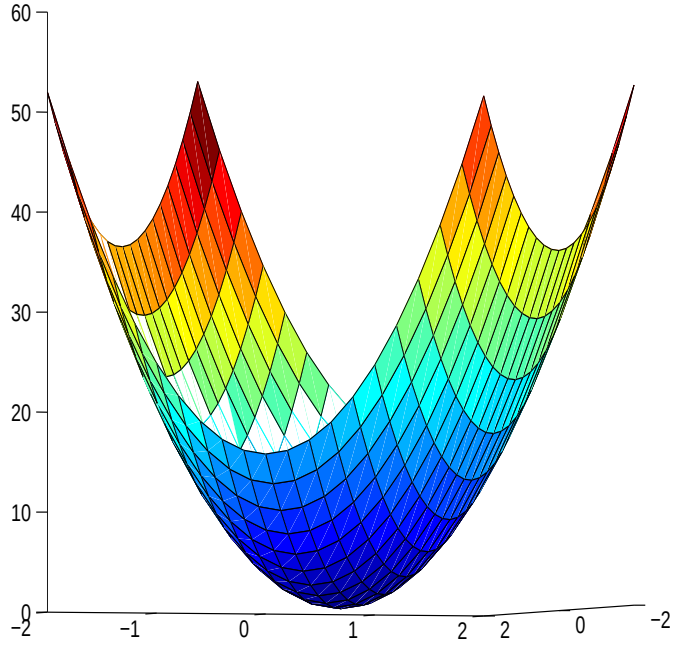
```
>>
hold on
x=[-2 : .2 : 2];
y=[-2 : .2 : 2];
[X,Y] = meshgrid(x,y);

z=4*X.^2 + 9*Y.^2;

mesh(X,Y,z)
```



Veranschaulichung als Fläche

Befehlsfolge:

```
>>
hold on
x=[-2 : .2 : 2];
y=[-2 : .2 : 2];
[X,Y] = meshgrid(x,y);

z=4*X.^2 + 9*Y.^2;

surf(X,Y,z)
```



Höhenlinien

a) contour(X,Y,z,30) : Es werden 30 Höhenlinien gezeichnet

b) Die Befehlsfolge

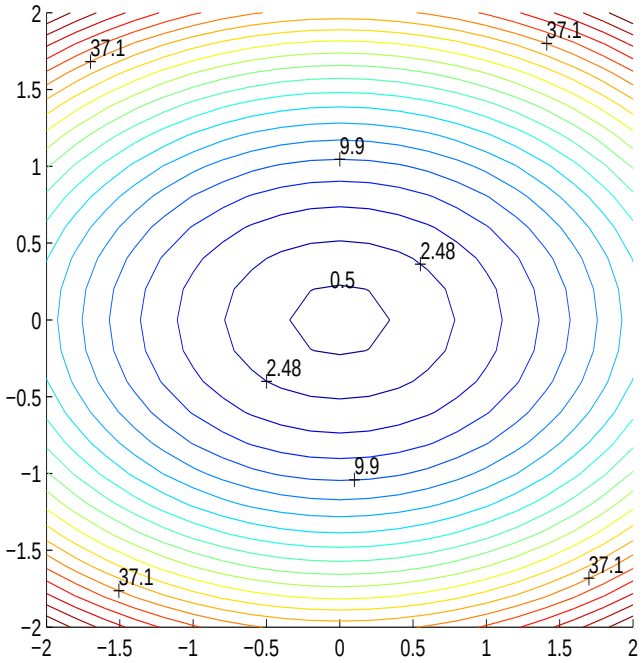
```
>>cs=contour(X,Y,z,20);

>>clabel(cs,'manual');
```

bewirkt das plotten von 20 Höhenlinien, die man mit der Maus anfahren kann. An den angeklickten Höhenlinien werden die Werte von f angegeben. In unserem Beispiel bleibt zunächst der mittlere Bereich des Bildes leer. Die Höhenlinie zu 0.5 wurde nachträglich eingefügt (s.unten).

c) Der Befehl

```
>> contour(X,Y,z,[.5 .5]);
```

Bewirkt das Zeichnen der Höhenlinie $C := \left\{ \binom{x}{y} : f(x,y) = 0.5 \right\}$.



Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Frage: Wie ändern sich die Funktionswerte, wenn ich an einer oder an mehreren Variablen wackle?

Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$

Stetigkeit: wie im $\mathbb{R}^1$, siehe Vorlesung!

Kurzform: Für jede Folge $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus D

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x})\,.$$

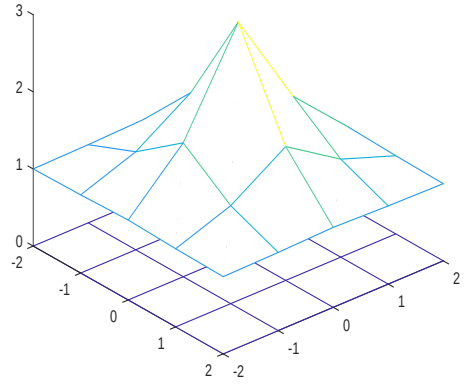
Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^1$: Stichworte

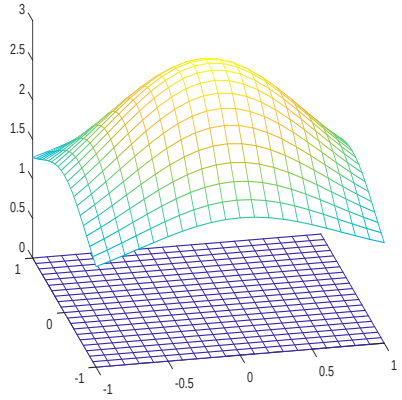
Tangentensteigung,

Hinreichend gute Approximierbarkeit durch lineare Funktionen

Änderungsrate: Wie stark ändert sich der Wert von f bei Änderung von t?

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$





f heißt **partiell differenzierbar nach** x_j in $\boldsymbol{x} \in D$, wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j + h \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_j \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

existiert. Im Falle der Existenz heißt der obige Wert

partielle Ableitung von f **nach** x_j $=: \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) =: f_{x_j}(\boldsymbol{x})$

f heißt partiell differenzierbar, wenn f nach allen Komponenten

$x_1, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar ist.

f heißt **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle f_{x_j}, $j = 1, \ldots, n$ stetig sind.

Im Falle der Existenz: wird der Vektor der partiellen Ableitungen

$$\textbf{grad}\, f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\boldsymbol{x})$$

Gradient von f genannt.

Darstellung mit Hilfe des **Differentialoperators Nabla**

$$\nabla := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \textbf{grad}\, f(\boldsymbol{x}) = (\nabla f(\boldsymbol{x}))^T$$

Beispiel $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$.

$f(x, y, z) := xy^2 \cos(z) \implies$

$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}) = f_x(x, y, z) =$

$\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = f_y(x, y, z) =$

$\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{x}) = f_z(x, y, z) =$

grad $f(\boldsymbol{x}) = (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})\,) = (\nabla \cdot f(x_1, \ldots, x_n))^T$.

In unserem Beispiel also mit $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

und $f(x, y, z) = xy^2 \cos(z)$

grad $f(\boldsymbol{x}) =$

Zum Beispiel: **grad** $f(10, 1, 0) = (1,\ 20,\ 0\ ).$

Und was heißt das?

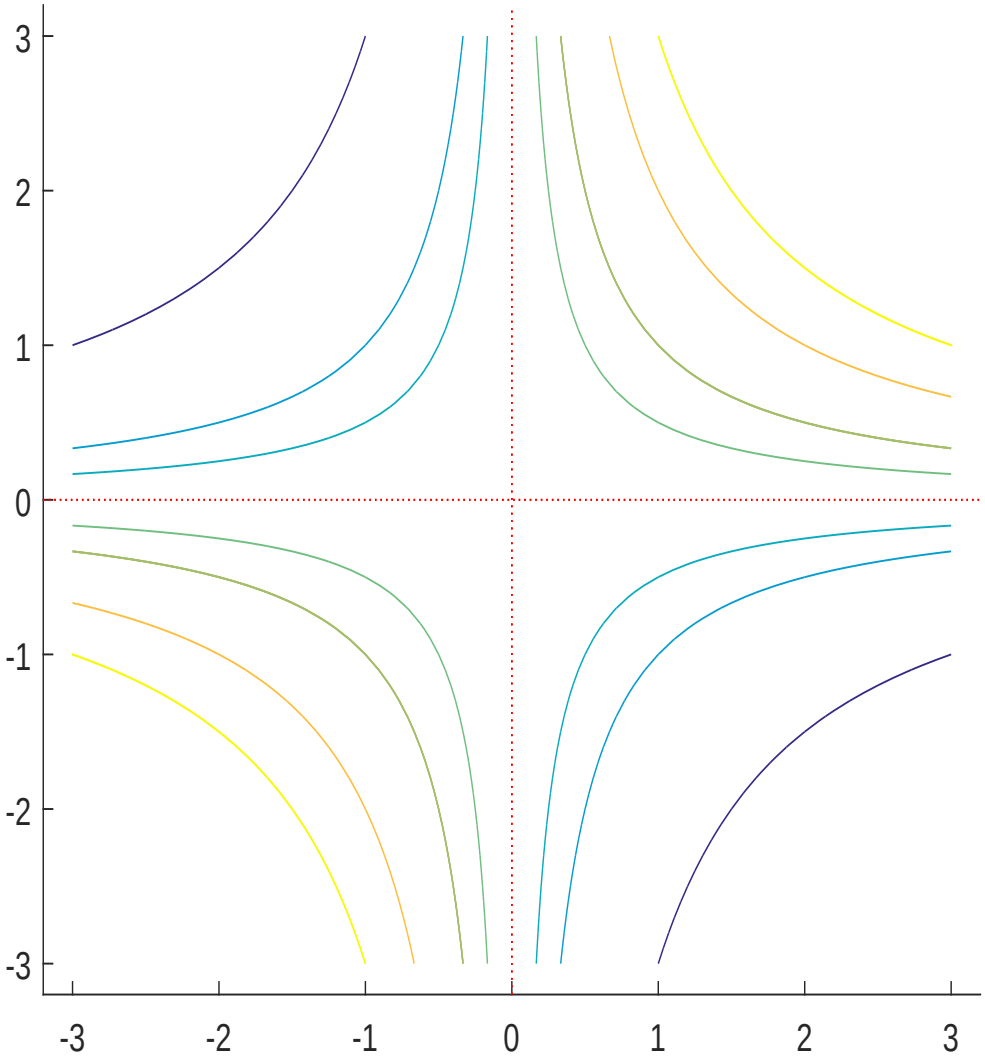
ACHTUNG: Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt nicht einmal die Stetigkeit! (siehe Vorlesung)

Veranschaulichung bei n=2: Hefte an Punkten (x, y) Vektoren in Richtung und Länge von grad$f(x, y)$ an.

Beispiel: $f(x, y) = \exp(xy) = e^{xy}$

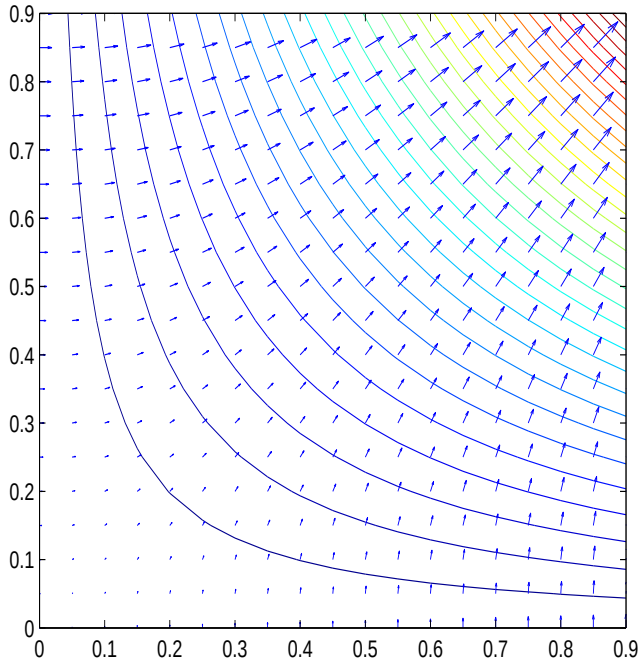
Höhenlinien:

Gradient:


3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

Veranschaulichung von Gradientenfeldern mit Matlab

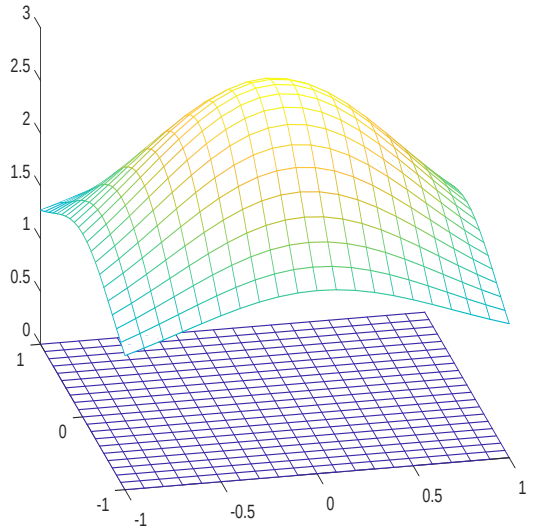
```
hold off
x=[-0.0 : .05 : .9];
y=[-0.0 : .05 : .9];
[X,Y] = meshgrid(x,y);
z= exp(X.*Y);
contour(X,Y,z,30) %Höhenl

hold on
[px,py] = gradient(z);  %
quiver(X,Y,px,py)   % in
% wird der Vektor (px,py) angeheftet.
```



Und was ersetzt jetzt die Tangente aus dem eindimensionalen Fall?

Tangentialebene an f in x_0

Sei $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$ in $(x_0, y_0) \in D$ partiell diff.bar



$$z(x,y) := f(x_0,y_0) + \textbf{grad}\, f(x_0,y_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

$$= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

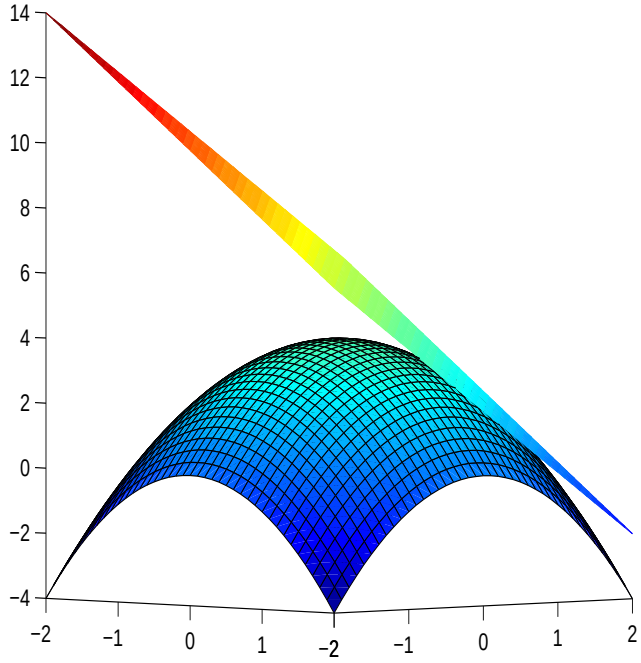
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \text{Ebene im } \mathbb{R}^3, \text{ die sich an Fläche } (x, y, f(x,y))^T \text{ anschmiegt}$$

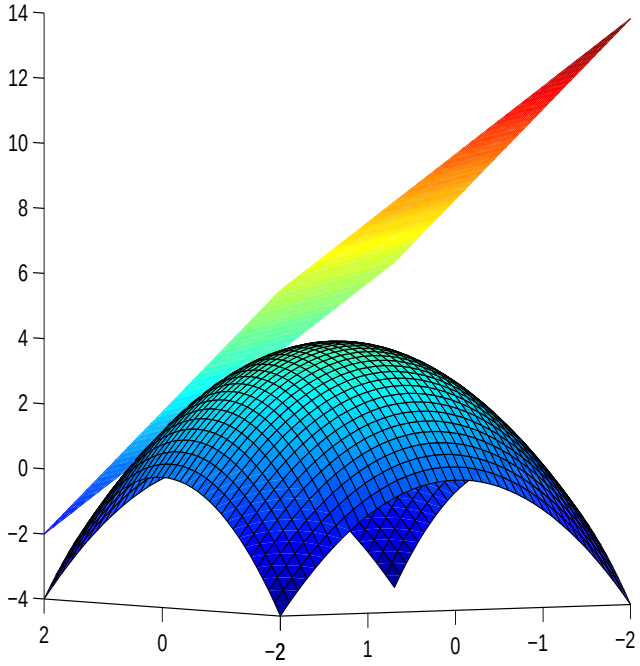
Beispiel: $f(x,y) := 4 - x^2 - y^2,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$

$T(x,y) := f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$

$f(1,1) =$

$f_x(x,y) =$ $\qquad\qquad$ $f_y(x,y) =$






```
x=[-2 : .1 : 2];
t=[-2 : .1 : 2];
[X,Y] = meshgrid(x,t);
z=4-X.*X-Y.*Y;
hold on
tz=2-2*(X-1)-2*(Y-1); %Tang.ebene im Punkt (1,1,2)
mesh(X,Y,tz)
surf(X,Y,z)
```

Ableitungen höherer Ordnung

Ist f part. diffbar. auf einer offenen Menge D, so kann man versuchen die partiellen Ableitungen erneut partiell abzuleiten.

Beispiel: $f(x,y,z) := xy^2\cos(z)$. Mit

$$f_x(x,y,z) = y^2\cos(z), \qquad f_y(x,y,z) = 2xy\cos(z)$$
$$f_z(x,y,z) = xy^2(-\sin(z)),$$

Damit erhalten wir zum Beispiel

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y(x,y,z) =: f_{yx}(x,y,z) =$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f_y(x,y,z) =: f_{yy}(x,y,z) =$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f_y(x,y,z) =: f_{yz}(x,y,z) =$$

Insgesamt erhält man 9 sogenannte zweite Ableitungen, die man zur **Hessematrix** von f zusammenfasst:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} (\boldsymbol{x})$$

Beispiel zur Aufgabe 2P: Die Funktion

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]$$

beschreibt näherungsweise die Auslenkung des Punktes $x \in [0, L]$ einer schwingenden Saite der Länge L zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit den Anfangsdaten $u(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$.

a) Bestimmen Sie die Randdaten $u(0,t)$ und $u(L,t)$.

b) Zeigen Sie, dass u die Wellengleichung $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$ erfüllt.

c) Skizzieren Sie die Form der Saite für $t = 0, \frac{L}{6c}, \frac{L}{4c}, \frac{L}{3c}, \frac{L}{2c}, \frac{L}{c}$.
Hinweis: $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$.

Lösung: $u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]$

a) $u(0,t) =$

$u(L,t) =$

b) Beh.: $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$.

Beweis: Ableitungen ausrechnen und einsetzen!

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]\right)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2\pi}{L}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]\right)$$

$$u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]\right)$$

$$u_t =$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2}\left[-(\tfrac{2\pi c}{L})^2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) - (\tfrac{2\pi c}{L})^2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]$$

c) $u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]$

$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+0)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-0)\right)\right] = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$

$$u(x,\frac{L}{6c}) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+\frac{L}{6})\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-\frac{L}{6})\right)\right]$$

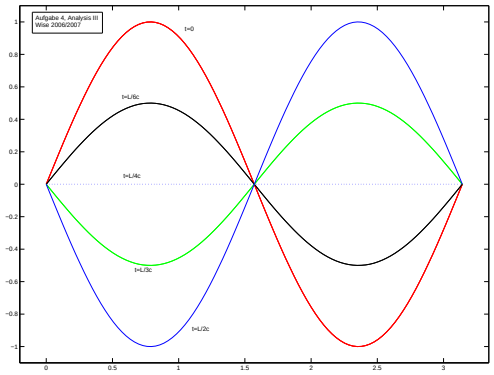
$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{L}+\frac{2\pi}{6})\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}-\frac{2\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}u(x,0)$$

Analog rechnet man

$$u(x, \frac{L}{4c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cdot \cos(\frac{2\pi}{L} \cdot c \cdot \frac{L}{4c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$u(x, \frac{L}{3c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cdot \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}u(x, 0)$$

$$u(x, \frac{L}{2c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cdot \cos(\pi) = -u(x, 0)$$

$$u(x, \frac{L}{c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cdot \cos(2\pi) = u(x, 0).$$