Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 8 (Aufgaben mit Lösungen der Hörsaalübung)

Aufgabe 29:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positive durchlaufene Randkurve ∂H der Halbkreisfläche $H:\ x^2 + y^2 \leq 4$ mit $x \leq y$.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x+y)/z \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve

$$\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad t \mapsto \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Die Randkurve setzt sich aus zwei glatten Teilkurven zusammen:
$\partial H = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, mit

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \ \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{5\pi}{4} \quad \text{und} \quad \mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \ -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\,.$$

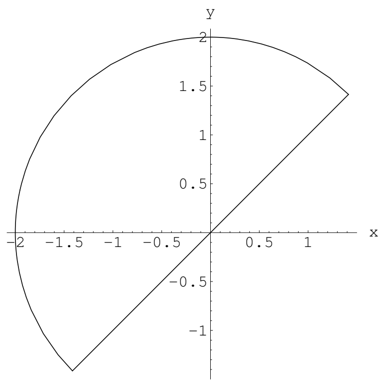

Bild 29 a) Halbkreisrandkurve ∂G

Zur Berechnung des Kurvenintegrals 2. Art werden die Tangentialvektoren benötigt:

$$\dot{\mathbf{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial H} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \int\limits_{\mathbf{c}_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\mathbf{c}_2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\
&= \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} \boldsymbol{f}(\mathbf{c}_1(t))\dot{\mathbf{c}}_1(t)\,dt + \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \boldsymbol{f}(\mathbf{c}_2(t))\dot{\mathbf{c}}_2(t)\,dt \\
&= \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} \left\langle \begin{pmatrix} 4\cos t\sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&\quad + \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} -8\cos t\sin^2 t + 2\cos t\,dt + \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t^2 + 1\,dt \\
&= \left(-\frac{8\sin^3 t}{3} + 2\sin t \right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/4} + \left(\frac{t^3}{3} + t \right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{10\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

b)

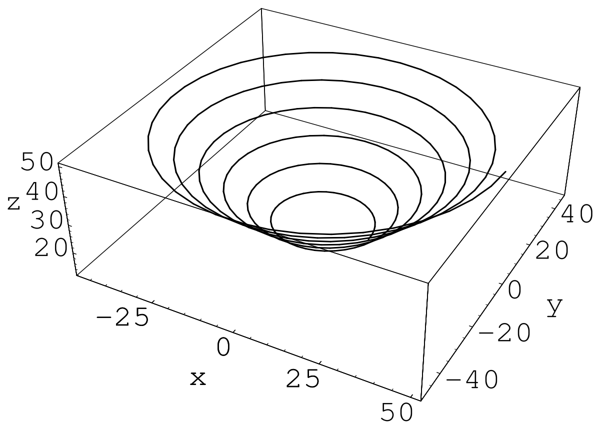

Bild 29 b) Kurve $\mathbf{c}$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_{4\pi}^{16\pi} \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t))\dot{\mathbf{c}}(t)\, dt \\
&= \int_{4\pi}^{16\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \\ (t\sin t + t\cos t)/t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_{4\pi}^{16\pi} t^2 + \sin t + \cos t\, dt = \int_{4\pi}^{16\pi} t^2\, dt \\
&= \left.\frac{t^3}{3}\right|_{4\pi}^{16\pi} = \frac{\pi^3(16^3 - 4^3)}{3} = 1344\pi^3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 30:

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\boldsymbol{f}$ und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{x}\,)d\,\boldsymbol{x}$.

Lösung:

a) Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend und die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{3y} - f_{2z} \\ f_{1z} - f_{3x} \\ f_{2x} - f_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20x^3y^3z^4 - 20x^3y^3z^4 \\ 15x^2y^4z^4 - 15x^2y^4z^4 \\ 12x^2y^3z^5 - 12x^2y^3z^5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ist erfüllt. Daher besitzt $\boldsymbol{f}\,(x,y,z)$ ein Potential $v(x,y,z)$, d.h. es gilt $\boldsymbol{f} = \operatorname{grad}\, v = (v_x, v_y, v_z)$.

b) $v_x(x,y,z) = 3x^2y^4z^5 + 1 \quad \Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + c(y,z)$

$\Rightarrow \quad v_y(x,y,z) = 4x^3y^3z^5 + c_y(y,z) \stackrel{!}{=} 4x^3y^3z^5 + 2y$

$\Rightarrow \quad c_y(y,z) = 2y \quad \Rightarrow \quad c(y,z) = y^2 + k(z)$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + k(z)$

$\Rightarrow \quad v_z(x,y,z) = 5x^3y^4z^4 + k'(z) \stackrel{!}{=} 5x^3y^4z^4 + 3z^2$

$\Rightarrow \quad k'(z) = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad k(z) = z^3 + K \quad$ mit $K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K$

c) Wählt man als Kurve $\boldsymbol{k}$ die direkte Verbindungslinie vom Punkt $(0,0,0)$ zum Punkt (x,y,z), d.h. $\boldsymbol{k}\,(t) = t(x,y,z)^T$, so lässt sich ein Potential v zu $\boldsymbol{f}$ berechnen nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale durch

$$\begin{aligned}
v(x,y,z) &= \int_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + K = \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(t))\dot{\boldsymbol{k}}(t)\, dt + K \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 3(tx)^2(ty)^4(tz)^5 + 1 \\ 4(tx)^3(ty)^3(tz)^5 + 2ty \\ 5(tx)^3(ty)^4(tz)^4 + 3(tz)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dt + K \\
&= \int_0^1 12t^{11}x^3y^4z^5 + x + 2ty^2 + 3t^2z^3\, dt + K \\
&= t^{12}x^3y^4z^5 + xt + t^2y^2 + t^3z^3\Big|_0^1 + K \\
&= x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K
\end{aligned}$$

d) Mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ ergibt sich nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_0^{\pi} \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t))\dot{\mathbf{c}}(t)\,dt \;=\; v(\mathbf{c}(\pi)) - v(\mathbf{c}(0)) \\ &= v(-1,0,-1) - v(1,0,1) \;=\; -1-1-(1+1) = -4\end{aligned}$$

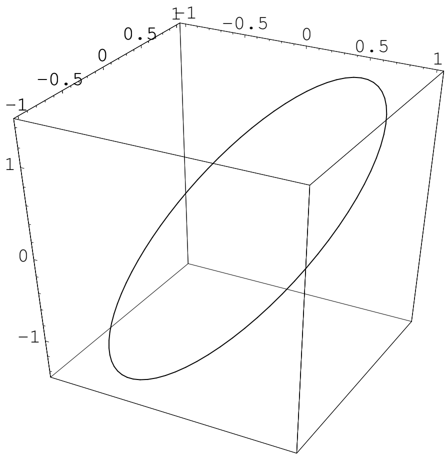

Bild 30 Kurve $\mathbf{c}$ für $T = 2\pi$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t))\dot{\mathbf{c}}(t)\,dt \;=\; v(\mathbf{c}(2\pi)) - v(\mathbf{c}(0)) \\ &= v(1,0,1) - v(1,0,1) \;=\; 0 \quad \text{(geschlossene Kurve)}\end{aligned}$$

Aufgabe 31:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x,y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E.

Lösung:

Die Ellipse E kann durch kartesische oder Polarkoordinaten beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}\,(r,\varphi) = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}, \quad \Rightarrow \ \det \boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}\,(r,\varphi) = 2r$$

$$\begin{aligned} E &= \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2\,,\ -\sqrt{1-(x/2)^2} \le y \le \sqrt{1-(x/2)^2} \right\}\,, \\ Q &= \left\{ (r,\varphi)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi}(Q) = E \end{aligned}$$

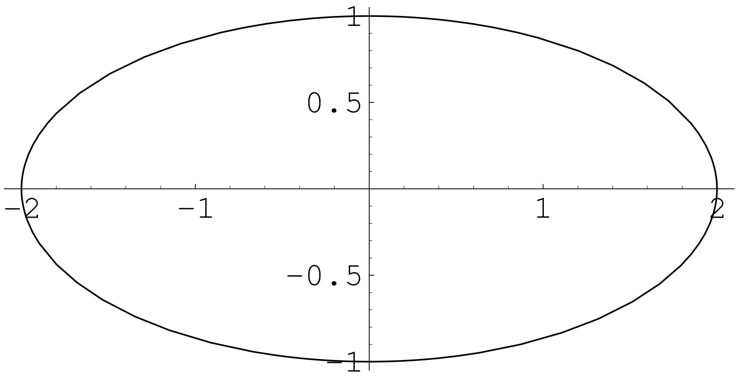

Bild 31: Ellipse E

Parametrisierung des Ellipsenrandes ∂E durch:

$$\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial E} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(\varphi)), \dot{\mathbf{c}}(\varphi) > d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -2\cos\varphi\sin\varphi - 2\sin\varphi \\ 4\cos\varphi + 4\sin^2\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 4\cos\varphi\sin^2\varphi + 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi + 4\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 4 + 8\cos\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = 4\varphi + \frac{8}{3}\sin^3\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_E \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_E (2x+4y^2)_x - (-xy-2y)_y \, d(x,y) \\
&= \int_E 4 + x \, d(x,y) \\
&= \int_Q (4+2r\cos\varphi) 2r \, d(r,\varphi) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4+2r\cos\varphi) 2r \, d\varphi dr \\
&= 8 \int_0^1 r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi + 4 \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \\
&= 8\pi r^2\Big|_0^1 + \frac{4r^3}{3}\Big|_0^1 \cdot \sin\varphi\Big|_0^{2\pi} \;=\; 8\pi
\end{aligned}$$

Integralsatz von Green: $\displaystyle\oint_{\partial E} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \;=\; 8\pi \;=\; \int_E \operatorname{rot} \; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$