Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 25:

a) Man zeichne den durch die Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = 24 - 2x^2$ eingeschlossenen Bereich P und stelle ihn als Normalbereich dar.

b) Man berechne $\displaystyle\int_P x \, d(x, y)$

Lösung:

a) Schnittpunkte von f und g:

$$2x = 24 - 2x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3) \Leftrightarrow x_1 = -4 \, , \; x_2 = 3.$$

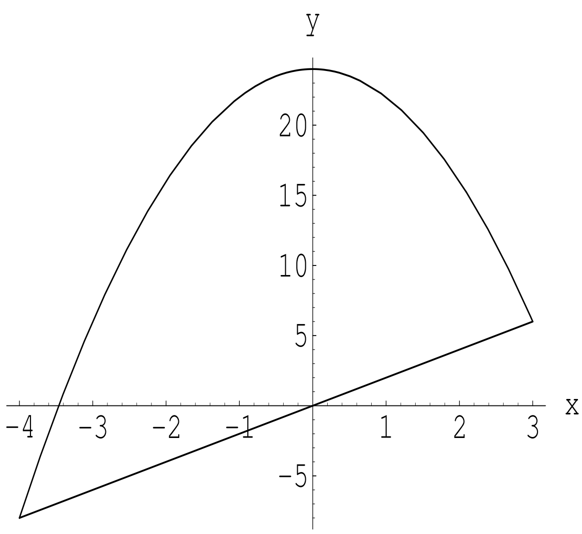

Bild 25 Normalbereich P

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -4 \le x \le 3\,,\ 2x \le y \le 24 - 2x^2 \right\}$$

b)
$$\begin{aligned} \int_P x \, d(x,y) &= \int_{-4}^{3} \int\limits_{2x}^{24-2x^2} x \, dy \, dx = \int_{-4}^{3} \left. (xy) \right|_{2x}^{24-2x^2} \, dx \\ &= \int_{-4}^{3} x(24 - 2x^2 - 2x) \, dx = -\frac{343}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 26:

a) Man zeichne den durch $x \leq 0$, $y \leq 0$, $0 \leq z$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ eingeschlossenen Bereich K und stelle ihn als Normalbereich dar.

b) Man berechne $\displaystyle\int_K 8yz\, d(x,y,z)$ in x, y, z-Koordinaten und in Kugelkoordinaten.

Lösung:

a) $x \leq 0$, $y \leq 0$, $0 \leq z$ beschreibt einen Oktanden im $\mathbb{R}^3$ und
$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ eine Kugeloberfläche vom Radius $r = 3$.

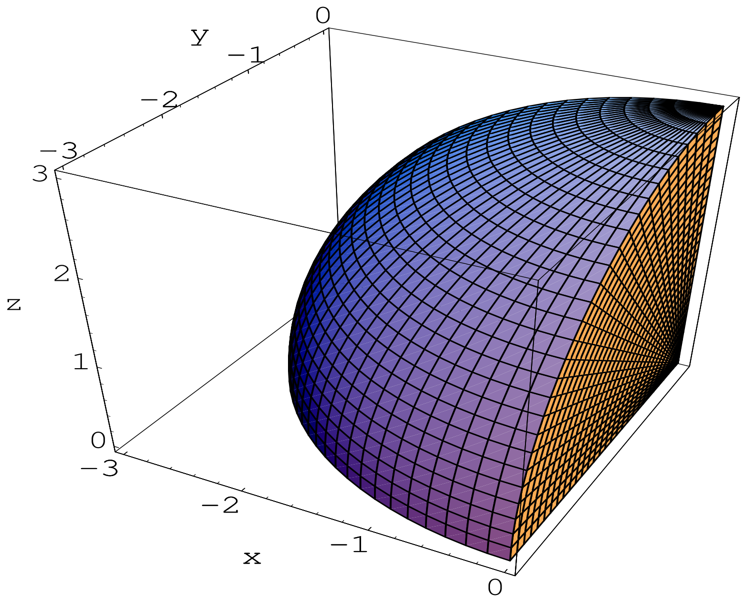

Bild 26 Achtelkugel K

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -3 \leq x \leq 0\,, \\ -\sqrt{9-x^2} \leq y \leq 0\,, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2} \end{array} \right\}$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_K 8yz\, d(x,y,z) &= \int_{-3}^{0} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} 8yz\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-3}^{0} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} 4yz^2\Big|_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}}\, dy\, dx \\
&= \int_{-3}^{0} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} 4y(9-x^2-y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_{-3}^{0} 2y^2(9-x^2) - y^4\Big|_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\, dx \\
&= \int_{-3}^{0} -(9-x^2)^2\, dx = -\frac{648}{5}
\end{aligned}$$

oder alternativ mit Transformation auf Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_K 8yz\, d(x,y,z) &= \int_{0}^{\pi/2} \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_{0}^{3} 8(r\sin(\varphi)\cos(\psi))(r\sin(\psi))r^2\cos(\psi)\, dr\, d\varphi\, d\psi \\
&= 8\int_0^3 r^4\, dr \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin(\varphi)\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin(\psi)\cos^2(\psi)\, d\psi \\
&= 8\left(\frac{r^5}{5}\Big|_0^3\right)\left(-\cos(\varphi)|_{\pi}^{3\pi/2}\right)\left(-\frac{\cos^3(\psi)}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) \\
&= \frac{8\cdot 3^5}{5}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{3} = -\frac{648}{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 27:

Man zeichne den durch $1 \le z \le 2$, $0 \le y$ und $x^2 + y^2 \le 9$ gegebenen halben Zylinder Z und berechne seinen Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = z$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Lösung:

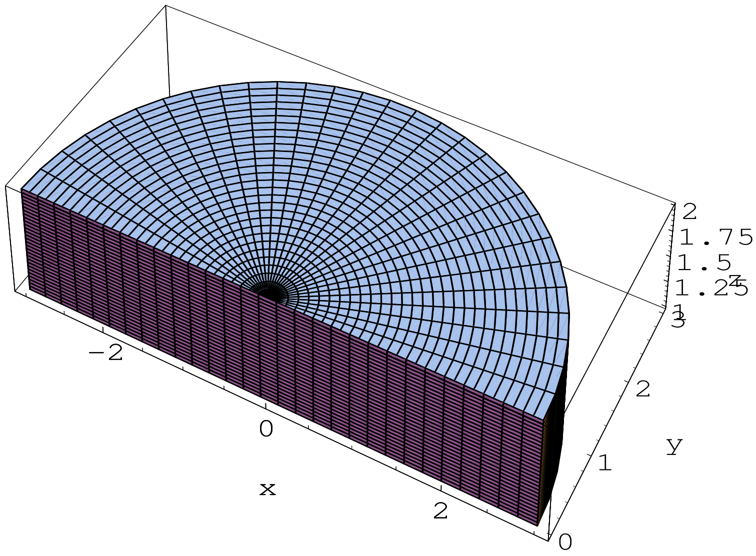

Bild 27 halber Zylinder Z

Zylinderkoordinaten für Z: $\quad 0 \le r \le 3\,,\ 0 \le \varphi \le \pi\,,\ 1 \le z \le 2$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}\,(r, \varphi, z)\,, \quad \det \boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}\,(r, \varphi, z) = r$$

Berechnung der Masse M in Zylinderkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit $\rho(x, y, z) = z$:

$$\begin{aligned} M &= \int_Z z\, d(x, y, z) = \int_0^3 \int_0^\pi \int_1^2 zr\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^3 \int_0^\pi \left. \frac{rz^2}{2} \right|_1^2 d\varphi\, dr \\ &= \frac{3}{2} \int_0^3 \int_0^\pi r\, d\varphi\, dr = \frac{3}{2} \int_0^3 \pi r\, dr = \frac{27\pi}{4} \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten (x_s, y_s, z_s):

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{M}\int_Z zx \, d(x,y,z) = \frac{1}{M}\int_0^3\int_0^\pi\int_1^2 zr\cdot r\cos(\varphi)\,dz\,d\varphi\,dr \\ &= \frac{3}{2M}\int_0^3\int_0^\pi r^2\cos(\varphi)\,d\varphi\,dr \;=\; \frac{3}{2M}\int_0^3 r^2\sin(\varphi)\Big|_0^\pi\,dr = 0 \end{aligned}$$

$x_s = 0$ ergibt sich auch auf Grund der Symmetrie.

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{M}\int_Z zy \, d(x,y,z) = \frac{1}{M}\int_0^3\int_0^\pi\int_1^2 zr\cdot r\sin(\varphi)\,dz\,d\varphi\,dr \\ &= \frac{3}{2M}\int_0^3\int_0^\pi r^2\sin(\varphi)\,d\varphi\,dr \;=\; \frac{3}{2M}\int_0^3 -r^2\cos(\varphi)\Big|_0^\pi\,dr \\ &= \frac{3}{M}\int_0^3 r^2\,dr \;=\; \frac{27}{M} \;=\; \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{1}{M}\int_Z z^2 \, d(x,y,z) = \frac{1}{M}\int_0^3\int_0^\pi\int_1^2 z^2 r\,dz\,d\varphi\,dr \\ &= \frac{7}{3M}\int_0^3\int_0^\pi r\,d\varphi\,dr \;=\; \frac{7\pi}{3M}\int_0^3 r\,dr \;=\; \frac{21\pi}{2M} \;=\; \frac{14}{9} \end{aligned}$$

Aufgabe 28:

Durch $x^2 + y^2 \leq 4$ und $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ wird ein Rotationsparaboloid P beschrieben. P habe die konstante Dichte ρ.

a) Man zeichne P unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3'.

b) Für P berechne man die Masse und das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse.

c) Man berechne das Trägheitsmoment von P bezüglich der zur z-Achse parallelen Achse D, die durch den Punkt $(1,1,5)^T$ verläuft.

Lösung:

a) Der MATLAB-Plotbefehl lautet

```
ezgraph3('surf','r*cos(t)','r*sin(t)','4-r^2',[0,2,0,2*pi])
```

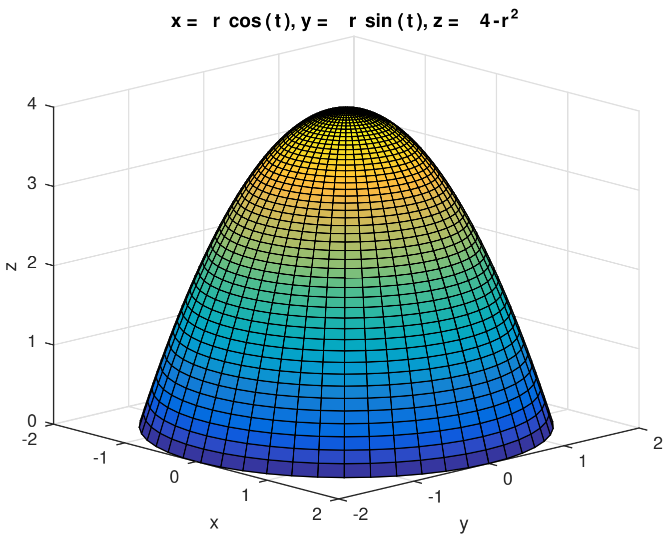

Bild 28 Rotationsparaboloid P.

b) Berechnung der Masse M in Zylinderkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ:

$$\begin{aligned} M &= \int_P \rho \, d(x,y,z) = \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} r \, dz \, d\varphi \, dr \;=\; \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} rz\Big|_0^{4-r^2} \, d\varphi \, dr \\ &= \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(4-r^2) \, d\varphi \, dr \;=\; \rho \int_0^2 r(4-r^2)\varphi\Big|_0^{2\pi} \, dr \\ &= 2\pi\rho \int_0^2 r(4-r^2) \, dr \;=\; 8\pi\rho \end{aligned}$$

Berechnung des Trägheitsmoments bezüglich der z-Achse in Zylinderkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ

$$\begin{aligned}
\Theta_{z\text{-Achse}} &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} \rho r^2 r \, dz \, d\varphi \, dr \;=\; \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 z\Big|_0^{4-r^2} \, d\varphi \, dr \\
&= \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3(4-r^2) \, d\varphi \, dr \;=\; \rho \int_0^2 r^3(4-r^2)\varphi\Big|_0^{2\pi} \, dr \\
&= 2\pi\rho \int_0^2 r^3(4-r^2) \, dr \;=\; \frac{32\pi\rho}{3}
\end{aligned}$$

c) Der Schwerpunkt von P liegt aus Symmetriegründen auf der z-Achse. Dies bestätigt sich rechnerisch mit Transformation auf Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{M} \int_Z \rho x \, d(x,y,z) \;=\; \frac{\rho}{M} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} r\cos(\varphi) r \, dz \, d\varphi \, dr \\
&= \frac{\rho}{M} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^2 \, dz \, dr \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \, d\varphi = 0 \\
y_s &= \frac{1}{M} \int_Z \rho y \, d(x,y,z) \;=\; \frac{\rho}{M} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} r\sin(\varphi) r \, dz \, d\varphi \, dr \\
&= \frac{\rho}{M} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^2 \, dz \, dr \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) \, d\varphi = 0
\end{aligned}$$

Daher gilt nach dem Steinerschen Satz

$$\Theta_D = Md^2 + \Theta_{z\text{-Achse}} = 8\pi\rho(1^2+1^2) + \frac{32\pi\rho}{3} = \frac{80\pi\rho}{3}\,.$$

Abgabetermin: 27.1. - 31.1.2020 (zu Beginn der Übung)