Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 21:

Zur Bestimmung der Extrema der Funktion

$$f(x,y) := e^{-x^2-y^2}(5x+2(y+1))$$

soll das Newton-Verfahren auf die Funktion $\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x,y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{F}(x,y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf.

c) Man schreibe ein MATLAB-Programm zur numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens unter Verwendung der MATLAB-Routine 'linsolve'.

d) Ausgehend von den Startvektoren $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ und $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (-0.5, -0.5)$ berechne man damit Lösungen auf zehn Stellen genau.

e) Man klassifiziere die berechneten stationären Punkte und erstelle einen Flächenplot und einen Höhenlinienplot von f mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Lösung:

a) $$\nabla f(x,y) = \boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(5-10x^2-4x(1+y)) \\ -2e^{-x^2-y^2}(-1+(2+5x)y+2y^2) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}\, f(x,y) \;=\; \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{F}(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(-30x+20x^3-4(1+y)+8x^2(1+y)) & e^{-x^2-y^2}(-10y+20x^2y+x(-4+8y+8y^2)) \\ e^{-x^2-y^2}(-10y+20x^2y+x(-4+8y+8y^2)) & 2e^{-x^2-y^2}(-2-6y+4y^2+4y^3+5x(-1+2y^2)) \end{pmatrix}$$

b) Das Newton-Verfahren

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)\Delta\boldsymbol{x}^k = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)$$

mit $\boldsymbol{x}^k = (x_k, y_k)^T$ und $\Delta\boldsymbol{x}^k = (x_{k+1} - x_k, y_{k+1} - y_k)^T$ sowie $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \Delta\boldsymbol{x}^k$ lautet hier:

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_k, y_k) & f_{xy}(x_k, y_k) \\ f_{xy}(x_k, y_k) & f_{yy}(x_k, y_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_x(x_k, y_k) \\ f_y(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

c)
```
function [x] = newtonverfahren(n)
%-------------------------------------------------------------
% Berechnet die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems
%
%    grad f(x,y)=0
%
% mit Hilfe des Newtonverfahrens.
%
% Input:            n   Anzahl der Iterationen
%
% Output:           x,y  Lösung
%
% Kai Rothe, November-2013.
%-------------------------------------------------------------
%
%  Startwert
%
  format long
  x= [0.5 0.5]';
%
%  Newtoniteration
%
 for i=1:n
%
%  Berechnung der Newtondaten
%
  [A,b]=newtondaten(x);
%
%  Lösen des Gleichungssystems
%
  d= linsolve(A,b);
%
%  Berechnung der nächsten Iterierten
%
   x=x+d
 end
```

```
function [A,b] = newtondaten(x)
%-------------------------------------------------------------
% Für das Newtonverfahren zur Lösung von
%
%          grad f(x,y) = 0
%
% werden die Daten bereitgestellt.
%
% Input:   (x,y) = Wert für den die Newton Daten berechnet werden.
%
% Output:  A = Hess f(x,y)
%          b =-grad f(x,y)
%
% Kai Rothe, November-2013.
%-------------------------------------------------------------
% f= @(x,y) (exp(-x^2-y^2)*(5*x+2*(y+1)))
%-------------------------------------------------------------
%
fx= @(x,y) ( exp(-x^2-y^2)*(5-10*x^2-4*x*(1+y)) );
fy= @(x,y) (-2*exp(-x^2-y^2)*(-1+(2+5*x)*y+2*y^2) );
fxx= @(x,y) ( exp(-x^2-y^2)*(-30*x+20*x^3-4*(1+y)+8*x^2*(1+y) ) );
fyy= @(x,y) ( 2*exp(-x^2-y^2)*(-2-6*y+4*y^2+4*y^3+5*x*(-1+2*y^2)) );
fxy= @(x,y) ( exp(-x^2-y^2)*(-10*y+20*x^2*y+x*(-4+8*y+8*y^2)) );
%
%  rechte Seite:
%
  b(1)=-fx(x(1),x(2));
  b(2)=-fy(x(1),x(2));
  b=b';
%
%  Newtonmatrix
%
  A(1,1)=fxx(x(1),x(2));
  A(1,2)=fxy(x(1),x(2));
  A(2,1)=fxy(x(1),x(2));
  A(2,2)=fyy(x(1),x(2));
%
 end
```

d) MATLAB-Funktionsaufrufe:

```
newtonverfahren(5)
```

k	x_k	y_k
0	0.5000000000 00000	0.5000000000 00000
1	0.5034482758 62069	0.1310344827 58621
2	0.5060723355 99918	0.2032304876 49506
3	0.5063799890 52751	0.2025519947 30291
4	0.5063799891 38949	0.2025519956 55580
5	0.5063799891 38949	0.2025519956 55580

```
newtonverfahren(6)
```

k	$\tilde{x}_k$	$\tilde{y}_k$
0	−0.5000000000 00000	−0.5000000000 00000
1	−1.0000000000 00000	−0.0909090909 09091
2	−0.8169603494 57842	−0.3927051776 81250
3	−0.8513263977 09304	−0.3399776873 29450
4	−0.8512075688 91408	−0.3404830278 65673
5	−0.8512075753 45846	−0.3404830301 38338
6	−0.8512075753 45846	−0.3404830301 38338

Mathematica berechnet für

$$\nabla f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(5-10x^2-4x(1+y)) \\ -2e^{-x^2-y^2}(-1+(2+5x)y+2y^2) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

analytisch die beiden Lösungen

$$\boldsymbol{x}_1 \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{5\left(-2+\sqrt{62}\right)}{58} \\ \dfrac{-2+\sqrt{62}}{29} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0.506379989 \\ 0.202551995 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{x}_2 \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{5\left(-2-\sqrt{62}\right)}{58} \\ \dfrac{-2-\sqrt{62}}{29} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -0.851207575 \\ -0.34048303 \end{pmatrix}.$$

e) Die Hessematrix

$$\boldsymbol{H}\, f(0.506379989, 0.202551995) = \begin{pmatrix} -11.0945 & -1.50438 \\ -1.50438 & -7.93529 \end{pmatrix}$$

ist im stationären Punkt $\boldsymbol{x}_1$ negativ definit, da

$$f_{xx}(0.506379989, 0.202551995) = -11.0945 < 0\,,$$

$$\det \boldsymbol{H}\, f(0.506379989, 0.202551995) = 85.7747 > 0\,.$$

Der gefundene stationäre Punkt ist also ein Maximum.

Die Hessematrix

$$\boldsymbol{H}\, f(-0.851207575, -0.34048303) = \begin{pmatrix} 6.20762 & 1.46919 \\ 1.46919 & 3.12232 \end{pmatrix}$$

ist im stationären Punkt $\boldsymbol{x}_2$ positiv definit, da ihre Hauptunterdeterminanten positiv sind. Der gefundene stationäre Punkt ist also ein Minimum.

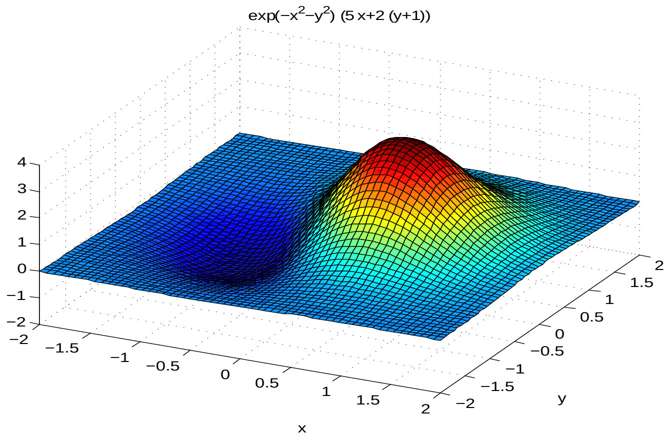

Bild 21 a)

```
ezsurf('exp(-x^2-y^2)*(5*x+2*(y+1))',[-2.0 2.0 -2.0 2.0])
```

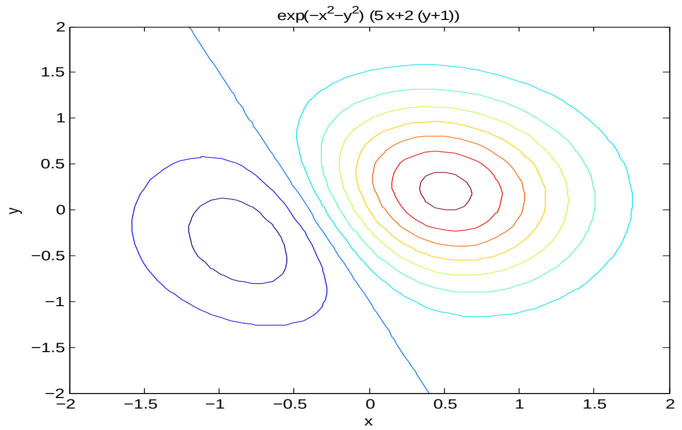

Bild 21 b)

```
ezcontour('exp(-x^2-y^2)*(5*x+2*(y+1))',[-2.0 2.0 -2.0 2.0])
```

Aufgabe 22:

Für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 6 - 2x + 4y$$

mit $Q := [0,3] \times [0,2]$ berechne man

a) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender äquidistanter Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \quad i,j = 1,\ldots,n$$

wobei $x_i = \dfrac{3i}{n}$ und $y_j = \dfrac{2j}{n}$ gelte

b) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
U_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \inf_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}\,(Q_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (6 - 2x_i + 4y_{j-1}) \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \right) \\
&= \frac{6}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (6n - 6i + 8(j-1)) \right) \\
&= \frac{6}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left(6n^2 - 6in + 8\frac{(n-1)n}{2} \right) \\
&= \frac{6}{n^3} \left(6n^3 - 6n\frac{n(n+1)}{2} + 4n^2(n-1) \right) \;=\; 42\left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (6 - 2x_{i-1} + 4y_j) \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \right) \;=\; 42\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_Q 6 - 2x + 4y \, d(x,y) &= \int_0^3 \left(\int_0^2 6 - 2x + 4y \, dy \right) dx \;=\; \int_0^3 6y - 2xy + 2y^2 \Big|_0^2 \, dx \\
&= \int_0^3 12 - 4x + 8 \, dx \;=\; 20x - 2x^2 \Big|_0^3 \;=\; 42
\end{aligned}$$

Man erhält natürlich:

$$42\left(1 - \frac{1}{n}\right) = U_f(Z) \;\le\; \int_Q f(x,y)\, d(x,y) = 42 \;\le\; O_f(Z) = 42\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Aufgabe 23:

Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 (2x+y)^2\,dy\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_2^3\int_0^1 \frac{y-x-2}{xy-x+y-1}\,dx\,dy$ und $\displaystyle\int_0^1\int_2^3 \frac{y-x-2}{xy-x+y-1}\,dy\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int_Q \sin(x+y)\,d(x,y)$ mit $Q=[0,\pi/2]\times[\pi/2,\pi]\,.$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^2 (2x+y)^2\,dy\,dx &= \int_0^1 \left.\frac{(2x+y)^3}{3}\right|_0^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 8(x+1)^3-8x^3\,dx \\ &= \frac{2}{3}\left((x+1)^4-x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(16-1-1) = \frac{28}{3}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\int_2^3\int_0^1 \frac{y-x-2}{xy-x+y-1}\,dx\,dy &= \int_2^3\int_0^1 \frac{y-1-(x+1)}{(x+1)(y-1)}\,dx\,dy \\ &= \int_2^3\int_0^1 \frac{1}{x+1}-\frac{1}{y-1}\,dx\,dy \\ &= \int_2^3 \ln|x+1|-\left.\frac{x}{y-1}\right|_0^1 dy \\ &= \int_2^3 \ln 2-\frac{1}{y-1}\,dy \\ &= y\ln 2-\ln|y-1|\big|_2^3 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_2^3 \frac{y-x-2}{xy-x+y-1}\,dy\,dx &= \int_0^1\int_2^3 \frac{1}{x+1}-\frac{1}{y-1}\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{y}{x+1}-\ln|y-1|\Big|_2^3\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x+1}-\ln 2\,dx \\ &= \ln|x+1|-x\ln 2\big|_0^1 = 0\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\int_Q \sin(x+y)\,d(x,y) &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx\,dy \\ &= -\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x+y)\,\big|_0^{\pi/2}\,dy \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos y-\cos(y+\pi/2)\,dy \\ &= \sin y-\sin(y+\pi/2)\big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \sin\pi-\sin(3\pi/2)-\sin(\pi/2)+\sin\pi = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 24:

Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1\int_1^2 \frac{z^3}{xy^2+x}\,dx\,dy\,dz\,,$

b) $\displaystyle\int_Q \cos y + y\sqrt{x+z}\,d(x,y,z) \quad \text{mit} \quad Q=[0,2]\times[0,\pi]\times[1,2]\,.$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
\int_R \frac{z^3}{xy^2+x}\,d(x,y) &= \int_0^2\int_0^1\int_1^2 \frac{z^3}{y^2+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^2\int_0^1 \frac{z^3}{y^2+1}\left(\int_1^2\frac{1}{x}\,dx\right)dy\,dz \\
&= \left(\int_1^2\frac{1}{x}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^2\int_0^1\frac{z^3}{y^2+1}\,dy\,dz\right) \\
&= \left(\int_1^2\frac{1}{x}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^2 z^3\left(\int_0^1\frac{1}{y^2+1}\,dy\right)dz\right) \\
&= \left(\int_1^2\frac{1}{x}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1\frac{1}{y^2+1}\,dy\right)\cdot\left(\int_0^2 z^3\,dz\right) \\
&= \left(\ln|x|\big|_1^2\right)\cdot\left(\arctan y\big|_0^1\right)\cdot\left(\frac{z^4}{4}\bigg|_0^2\right) \;=\; \pi\ln(2)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_Q \cos y + y\sqrt{x+z}\,d(x,y,z) &= \int_1^2\int_0^2\int_0^\pi \cos y + y\sqrt{x+z}\,dy\,dx\,dz \\
&= \int_1^2\int_0^2\left(\sin y + \frac{y^2}{2}\sqrt{x+z}\right)\bigg|_0^\pi dx\,dz \\
&= \frac{\pi^2}{2}\int_1^2\int_0^2 \sqrt{x+z}\,dx\,dz \\
&= \frac{\pi^2}{3}\int_1^2 \left((x+z)^{3/2}\right)\big|_0^2\,dz = \frac{\pi^2}{3}\int_1^2 (2+z)^{3/2}-z^{3/2}\,dz \\
&= \frac{2\pi^2}{15}\left((2+z)^{5/2}-z^{5/2}\right)\big|_1^2 = \frac{2\pi^2}{15}\left(33-4\sqrt{2}-9\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Abgabetermin: 13.1. - 17.1.2020 (zu Beginn der Übung)