Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 17:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0$$

implizit gegebene(n) Kurve(n). Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve(n),

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Lösung:

$f(x,y) := y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0\,,\qquad \text{grad}\ f(x,y) = (4x(x^2-1), 4y(y^2-1))^T$

a) Die Kurve besitzt beispielsweise folgende Symmetrien:
zur x-Achse, da $f(x,y) = f(x,-y)$,
zur y-Achse, da $f(x,y) = f(-x,y)$,
zum Ursprung, da $f(x,y) = f(-x,-y)$,
zur Winkelhalbierenden, da $f(x,y) = f(y,x)$

b) Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x,y) \neq 0\,.$$

$0 = f_x(x,y) = 4x(x^2-1) \quad \Rightarrow$

1. Fall: $\quad x = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = f(0,y) = y^2(y^2-2) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ \vee \ y = \pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $\quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$

$$\Rightarrow \quad 0 = f(\pm 1, y) = y^4 - 2y^2 - 1 = (y^2-1)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; P_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Da nur für $P_1, \cdots, P_6$ die Bedingung $f_y(P_i) \neq 0$ erfüllt ist, sind dies die Punkte mit horizontaler Tangente.

c) Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_y(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x,y) \neq 0\,.$$

$$0 = f_y(x,y) = 4y(y^2-1) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad y^2 - 1 = 0$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = f(x,0) = x^2(x^2-2) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_7 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_8 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f(x, \pm 1) = x^4 - 2x^2 - 1 = (x^2-1)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad P_9 = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{10} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \; P_{11} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}, \; P_{12} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da nur für $P_7, \cdots, P_{12}$ die Bedingung $f_x(P_i) \neq 0$ erfüllt ist, sind dies die Punkte mit vertikaler Tangente. Dieses Ergebnis kann auch aus Symmetriegründen abgeleitet werde.

d) Für $P_0 = (0,0)^T$ gilt grad $f(0,0) = \mathbf{0}$, damit ist P_0 einziger singulärer Punkt.

$$\boldsymbol{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Eine Klassifikation nach Skript Seite 83 ergibt, wegen $\det \boldsymbol{H}\, f(0,0) > 0$, einen isolierten Punkt (Maximum).

e)

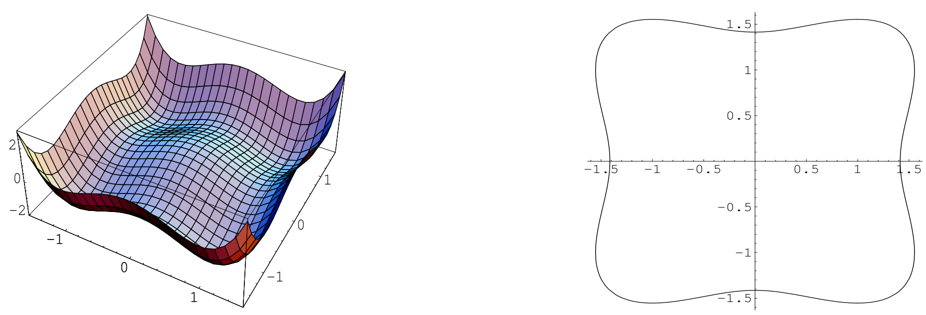

Bild 17: $f(x,y) = y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2$, Niveaumenge $f(x,y) = 0$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x,y,z) = 16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5\,.$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x,y,z) = c$, die durch den Punkt $(3,1,0)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man gebe im Punkt $(3,1,0)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

c) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

d) Man zeichne die Fläche.

Lösung:

a) Wegen $h(3,1,0) = 16$ wird die Niveaumenge durch die implizite Gleichung

$$g(x,y,z) := 16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y - 11 = 0$$

beschrieben. Um festzustellen, ob $g(x,y,z) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(3,1,0)$ eine glatte Fläche bildet muss die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen überprüft werden:

$$\text{grad}\, g(x,y,z) = (2x+2, 8y-8, 32z)^T \quad \Rightarrow \quad \text{grad}\, g(3,1,0) = (8,0,0)^T\,,$$

damit ist nur $g_x(3,1,0) = 8$ eine invertierbare 1×1 Untermatrix. Nach dem Satz über implizite Funktionen bildet die Niveaumenge also eine glatte Fläche, die durch Auflösen von $g(x,y,z) = 0$ nach x beschreibbar ist, d.h. es gilt in einer Umgebung von $(3,1,0)$

$$x = f(y,z)\,, \quad \text{mit} \quad f(1,0) = 3 \quad \text{und} \quad g(f(y,z),y,z) = 0\,.$$

b) In $(3,1,0)$ wird die Fläche f näherungsweise beschrieben durch die zugehörige Tangentialebene T_1, in vektorwertiger Schreibweise bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y,z) \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} T_1(y,z;1,0) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zur Darstellung der Tangentialebene wird benötigt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}f(y,z) &= -(g_x)^{-1}(g_y, g_z) \\ &= -\frac{1}{2f(y,z)+2}(8y-8, 32z) \\ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J}f(1,0) &= -\frac{1}{2\cdot 3+2}(0,0) = (0,0)\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Parameterform der Tangentialebene

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} T_1(y,z;1,0) \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(1,0) + \boldsymbol{J}f(1,0)\begin{pmatrix} y-1 \\ z \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

c) $16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5 = 16$ kann explizit nach x aufgelöst werden. Unter Berücksichtigung von $x(1,0) = 3$ kommt nur die '+' Variante beim Wurzelziehen in Frage.

$$\begin{aligned} 16 &= 16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5 \\ &= 16z^2 + (x+1)^2 + 4(y-1)^2 \\ \Rightarrow \quad x(y,z) &= -1 + \sqrt{16 - 16z^2 - 4(y-1)^2} =: h(y,z) \end{aligned}$$

Eine eindeutige Auflösbarkeit nach y bzw. z scheitert u.a. an der Mehrdeutigkeit der Wurzel.

d) $16 = 16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5 = 16z^2 + (x+1)^2 + 4(y-1)^2$

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten kann die gesamte Niveaumenge folgendemaßen durch $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ parametrisiert werden:

$$p(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 4\cos\varphi\cos\theta - 1 \\ 2\sin\varphi\cos\theta + 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

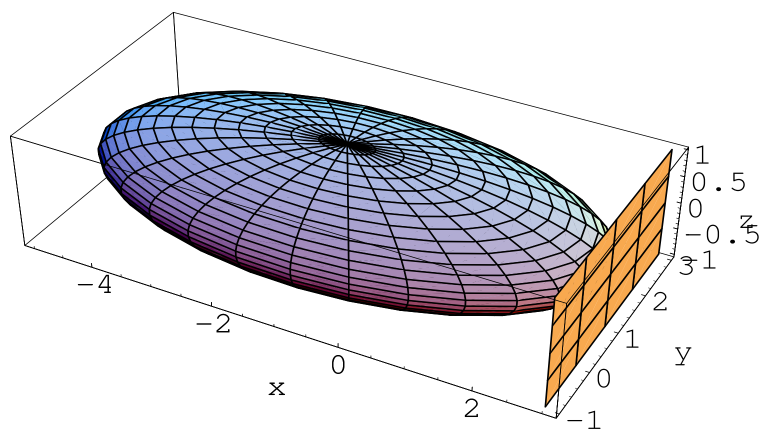

Bild 18 Niveaumenge $16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5 = 16$ und Tangentialebene

Aufgabe 19:

Man berechne und klassfiziere die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 - 2x = 3$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Polarkoordinatenparametrisierung $\mathbf{c}$ des Kreises und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Lösung:

Unter der Nebenbedingung $g(x,y) := (x-1)^2+y^2-4 = 0$ sollen die Extremalpunkte der Funktion $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ bestimmt werden.

a) Regularitätsbedingung:

$\boldsymbol{J}\, g(x,y) = \text{grad } g(x,y)^T = (2(x-1), 2y) = (0,0) \;\Rightarrow\; (x,y) = (1,0)$

Es gilt $g(1,0) = -4$, d.h. der Kreismittelpunkt $(1,0)$ liegt nicht auf dem Kreis $g = 0$. Daher erfüllen alle zulässigen Punkte, d.h. $g(x,y) = 0$, die Regularitätsbedingung

$$\text{Rang}\,(\boldsymbol{J}\, g(x,y)) = 1\,.$$

Lagrange-Funktion: $F(x,y) = 4x^2 + y^2 + \lambda((x-1)^2 + y^2 - 4)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x + 2\lambda(x-1) \\ 2y(1+\lambda) \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Gleichung:

1.Fall: $y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = g(x,0) = (x-1)^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 3\,,\ x_2 = -1$

Extremalkandidaten: $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda = -1 \;\Rightarrow\; 0 = 8x - 2(x-1) = 6x + 2 \;\Rightarrow\; x_3 = -1/3$

$\Rightarrow\; 0 = g(-1/3, y) = (-1/3 - 1)^2 + y^2 - 4 \;\Rightarrow\; y_{2,3} = \pm\sqrt{20}/3$

Extremalkandidaten: $P_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{20} \end{pmatrix}$, $P_4 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{20} \end{pmatrix}$

Da die Menge $g(x,y) = 0$ einen Kreis beschreibt, ist sie kompakt.

Die stetige Funktion f nimmt auf $g(x,y) = 0$ absolutes Maximum und Minimum an, da der Kreis eine kompakte Menge ist. Unter den Extremalkandidaten befinden sich also absolutes Maximum und Minimum.

Für die Funktionswerte der Extremalkandidaten berechnet man

$$f(P_1) = 36\,,\quad f(P_2) = 4\,,\quad f(P_{3,4}) = \frac{24}{9}\,.$$

Also ist P_1 absolutes Maximum und $P_{3,4}$ sind absolute Minima.

Die Anschauung ergibt P_2 als lokales Maximum. Dies lässt sich über die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung, also über die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 8+2\lambda & 0 \\ 0 & 2(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{g}\,(x,y)$ in P_2 nachweisen. Für $P_2 = (-1,0)^T$ erhält man aus der ersten Gleichung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel

$0 = -8 - 4\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = -2$. Damit erhält man

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{g}\,(-1,0) = (-4,0) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hess}F(-1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Der Kern wird aufgespannt durch $\boldsymbol{e}_2^T = (0,1)$.

Wegen $\boldsymbol{e}_2^T \mathrm{Hess}F(-1,0)\,\boldsymbol{e}_2 = -2$, ist $\mathrm{Hess}F$ auf dem Kern negativ definit. Also ist P_2 ein strenges lokales Maximum.

b) Der Kreis $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ ist durch Polarkoordinaten folgendermaßen parametrisierbar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t)+1 \\ 2\sin t \end{pmatrix} =: \mathbf{c}(t)\,, \quad 0 \le t < 2\pi\,,$$

d.h. es gilt $g(2\cos(t)+1, 2\sin(t)) = 0$. Wir suchen nun die Extrema von

$$h(t) := f(\mathbf{c}(t)) = 4(2\cos(t)+1)^2 + (2\sin t)^2 = 12\cos^2 t + 16\cos t + 8\,.$$

Extremalkandidaten: $h'(t) = -8\sin t(3\cos t + 2) = 0 \quad \Rightarrow$

$t_1 = 0\,,\ t_2 = \pi\,,\ t_3 = \arccos(-2/3)\,,\ t_4 = 2\pi - \arccos(-2/3)$.

(Für $i = 1,2,3,4$ gehören die Werte t_i zu den Punkten P_i aus a).)

$h''(t) = -8(6\cos^2 t + 2\cos t - 3) \Rightarrow h''(t_1) = -40, h''(t_2) = -8, h''(t_{3,4}) = 40/3$

Damit liegen für $t_{1,2}$ lokale Maxima mit den Funktionswerten $h(t_1) = 36$ und $h(t_2) = 4$ und für $t_{3,4}$ lokale Minima mit dem Funktionswert $h(t_{3,4}) = 24/9$ vor.

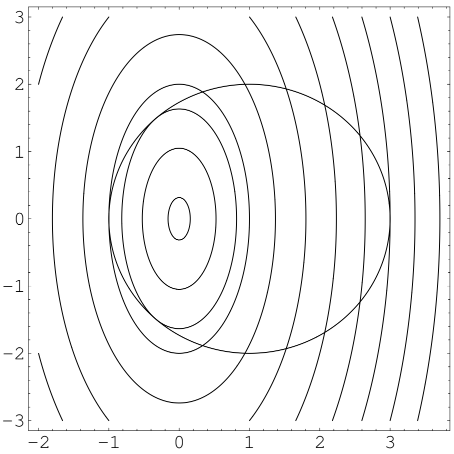

Bild 19 a) Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ mit Nebenbedingung $g(x,y) := (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$

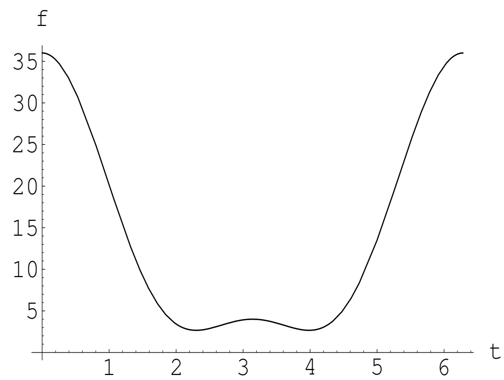

Bild 19 b) $h(t) := f(\mathbf{c}(t)) = 12\cos^2 t + 16\cos t + 8$

Aufgabe 20:

Für die Funktion $f(x,y,z) = y+2z$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des parabolischen Zylinders $z = x^2 - 1$ mit der Ebene $z = 2y$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Lösung:

Nebenbedingungen: $g_1(x,y,z) := x^2 - z - 1 = 0$ und $g_2(x,y,z) := z - 2y = 0.$

Regularitätsbedingung: $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

besitzt in ganz $\mathbb{R}^3$ den Rang 2.

Alle zulässigen Punkte erfüllen also die Regularitätsbedingung und die Lagrangesche Multiplikatorregel kann angewendet werden:

Lagrange-Funktion: $F(x,y,z) = y + 2z + \lambda_1(x^2 - z - 1) + \lambda_2(z - 2y)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x \\ 1 - 2\lambda_2 \\ 2 - \lambda_1 + \lambda_2 \\ x^2 - z - 1 \\ z - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ_1 und λ_2 ergeben sich aus der 2. und 3. Gleichung durch Lösen eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 5/2\ ,\ \lambda_2 = 1/2$$

1. Gleichung: $x = 0 \Rightarrow 0 = g_1(0,y,z) = -z - 1 \Rightarrow z = -1$
$\Rightarrow 0 = g_2(0,y,-1) = -1 - 2y \Rightarrow y = -1/2$

Einziger Extremalkandidat: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Da die Schnittmenge des parabolischen Zylinders $z = x^2 - 1$ mit der Ebene $z = 2y$ eine Parabel und damit unbeschränkt ist, kann hier kein Kompaktheitsargument verwendet werden.

Wir klassifizieren den Extremalkandidaten P_1 daher über die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung, also über die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}\,(x,y,z)$ in P_1

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}\,(0,-1/2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Kern wird aufgespannt durch $\boldsymbol{e}_1^T = (1,0,0)$.

Wegen $\boldsymbol{e}_1^T \mathrm{Hess}F(0,-1/2,-1)\,\boldsymbol{e}_1 = 2\lambda_1 = 5$, ist $\mathrm{Hess}F$ auf dem Tangentialraum positiv definit. Also ist P_1 ein strenges lokales Minimum mit dem Funktionswert $f(P_1) = -5/2$.

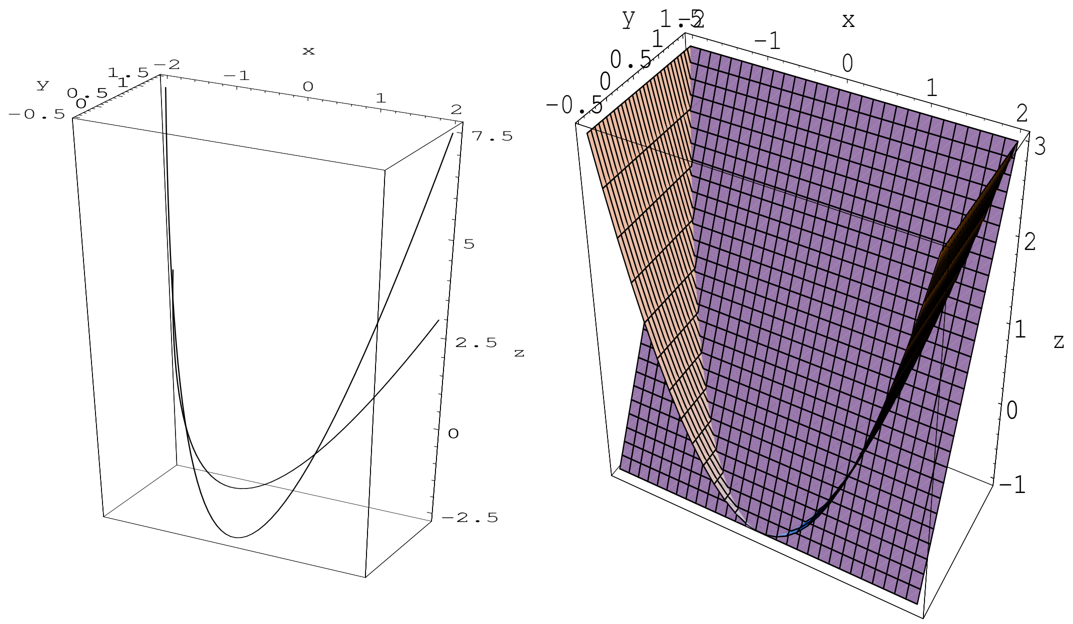

Bild 20: f auf dem Schnitt des parabolischen Zylinders $z = x^2 - 1$ mit der Ebene $z = 2y$

Abgabetermin: 16.12. - 20.12.2019 (zu Beginn der Übung)