Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 13:

Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

$$f(x, y, z) = x - y + (x - z)^2 + (y - z)^3 \,.$$

Lösung:

$$\begin{array}{lll}
f(x,y,z) = x - y + (x-z)^2 + (y-z)^3 & \Rightarrow & f(0,0,0) = 0 \\
 & & \\
f_x(x,y,z) = 1 + 2(x-z) & \Rightarrow & f_x(0,0,0) = 1 \\
f_y(x,y,z) = -1 + 3(y-z)^2 & \Rightarrow & f_y(0,0,0) = -1 \\
f_z(x,y,z) = -2(x-z) - 3(y-z)^2 & \Rightarrow & f_z(0,0,0) = 0 \\
 & & \\
f_{xx}(x,y,z) = 2 & \Rightarrow & f_{xx}(0,0,0) = 2 \\
f_{xy}(x,y,z) = 0 & \Rightarrow & f_{xy}(0,0,0) = 0 \\
f_{xz}(x,y,z) = -2 & \Rightarrow & f_{xz}(0,0,0) = -2 \\
f_{yy}(x,y,z) = 6(y-z) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0,0) = 0 \\
f_{yz}(x,y,z) = -6(y-z) & \Rightarrow & f_{yz}(0,0,0) = 0 \\
f_{zz}(x,y,z) = 2 + 6(y-z) & \Rightarrow & f_{zz}(0,0,0) = 2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_2(x,y,z;0,0,0) \;&=\; f(0,0,0) + f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z \\
&\quad + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(0,0,0)x^2 + f_{yy}(0,0,0)y^2 + f_{zz}(0,0,0)z^2 \\
&\quad + 2f_{xy}(0,0,0)xy + 2f_{xz}(0,0,0)xz + 2f_{yz}(0,0,0)yz\big) \\
&=\; x - y + x^2 - 2xz + z^2
\end{aligned}$$

Da der Entwicklungspunkt der Nullpunkt ist, wäre es einfacher gewesen die gegebene Funktion auszumultiplizieren und die Terme oberhalb der quadratischen, dann wegzulassen:

$$f(x,y,z) = x - y + (x-z)^2 + (y-z)^3 = x - y + x^2 - 2xz + z^2 + (y-z)^3.$$

Aufgabe 14:

Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades für die Funktion

$$f(x,y) = (y + \cos y)\sin x$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ verwendet, nach oben ab.

Lösung:

$f(x,y) = (y + \cos y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1$

$f_x(x,y) = (y + \cos y)\cos x \quad \Rightarrow \quad f_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$

$f_y(x,y) = (1 - \sin y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1$

$f_{xx}(x,y) = -(y + \cos y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1$

$f_{xy}(x,y) = (1 - \sin y)\cos x \quad \Rightarrow \quad f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$

$f_{yy}(x,y) = -\cos y \sin x \quad \Rightarrow \quad f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1$

$$\begin{aligned}
T_2\left(x, y; \frac{\pi}{2}, 0\right) &= f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) + f_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) y \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 2 f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) y + f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) y^2\right) \\
&= 1 + y - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2}
\end{aligned}$$

Für die Fehlerabschätzung sind die dritten Ableitungen erforderlich

$$\begin{aligned}
f_{xxx}(x,y) &= -(y + \cos y)\cos x \\
f_{xxy}(x,y) &= -(1 - \sin y)\sin x \\
f_{xyy}(x,y) &= -\cos y \cos x \\
f_{yyy}(x,y) &= \sin y \sin x.
\end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung für $(x, y) = (0, 0)$ zieht mit $\theta \in]0, 1[$ ein $(\xi_1, \xi_2) := \left((1-\theta)\frac{\pi}{2}, 0\right)$ nach sich. Es gilt also $0 < \xi_1 < \frac{\pi}{2}$ und $\xi_2 = 0$.

$$\begin{aligned} & \left| f(0,0) - T_2\left(0, 0; \frac{\pi}{2}, 0\right)\right| = \left| R_2\left(0, 0; \frac{\pi}{2}, 0\right)\right| \\ = \; & \frac{1}{3!}\left| f_{xxx}(\xi_1, 0)\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)^3 + 3 f_{xxy}(\xi_1, 0)\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot (0-0) \right. \\ & \left. +3 f_{xyy}(\xi_1, 0)\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot (0-0)^2 + f_{yyy}(\xi_1, 0)(0-0)^3 \right| \\ = \; & \frac{1}{3!}\left| f_{xxx}(\xi_1, 0)\right| \cdot \left| -\frac{\pi}{2}\right|^3 = \frac{\pi^3 \left| -(0 + \cos 0)\cos \xi_1\right|}{48} \le \frac{\pi^3}{48} = 0.645964... \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler lautet

$$\left| f(0,0) - T_2\left(0, 0; \frac{\pi}{2}, 0\right)\right| = \left| T_2\left(0, 0; \frac{\pi}{2}, 0\right)\right| = \left| 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 \right| = 0.233701...$$

Aufgabe 15:

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 - x^2y^2$,

b) $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2 - x^2 - y^2$,

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

d) $f(x, y) = x \sin y$.

Lösung:

a) $\operatorname{grad} f(x, y) = (2x(1 - y^2), 2y(1 - x^2))^T = (0, 0)^T$

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow y = 0$, 2. Fall: $y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Man erhält die stationären Punkte

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(1 - y^2) & -4xy \\ -4xy & 2(1 - x^2) \end{pmatrix}$$

P_0 ist strenges lokales Minimum, denn $\boldsymbol{H}\, f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

$P_{1,4}$ sind Sattelpunkte, denn

$\boldsymbol{H}\, f(P_{1,4}) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 4$).

$P_{2,3}$ sind Sattelpunkte, denn

$\boldsymbol{H}\, f(P_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 4$).

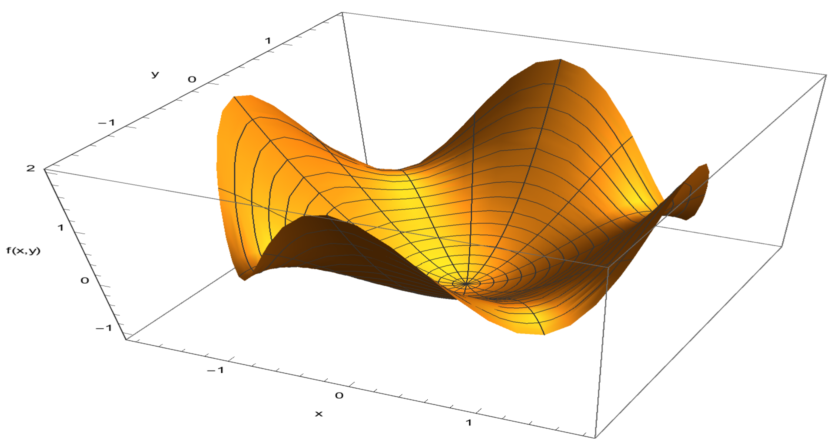

Bild 15 a): $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 - x^2y^2$

b) $f(x,y) = 2(x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2 \Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) = (4(x^2+y^2)-1)(2x,2y)^T = (0,0)$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte sind $(x_0,y_0) = (0,0)$ und alle Punkte mit

$$4(x^2+y^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 .$$

Diese liegen also auf dem Kreis K vom Radius $r = \frac{1}{2}$ um $(0,0)$.

$$\boldsymbol{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(4(x^2+y^2)-1)+16x^2 & 16xy \\ 16xy & 2(4(x^2+y^2)-1)+16y^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist negativ definit

$\Rightarrow \quad (x_0,y_0) = (0,0)$ ist strenges lokales Maximum.

Für die stationären Punkte auf K erhält man mit $x^2+y^2 = \frac{1}{4}$:

$$\boldsymbol{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 16x^2 & 16xy \\ 16xy & 16y^2 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom:

$$p(\lambda) = (16x^2-\lambda)(16y^2-\lambda) - 16^2x^2y^2 = \lambda^2 - 16(x^2+y^2)\lambda = \lambda(\lambda-4) = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}\, f(x,y)$ ist positiv semidefinit.

Damit können die Punkte auf K keine lokalen Maxima sein.

Man erkennt, dass f mit $r^2 = x^2+y^2$ rotationssymmetrisch aus $\tilde{f}(r) = 2r^4 - r^2$ ensteht. $\tilde{f}$ besitzt für $r = \pm\frac{1}{2}$ absolute Minima und für $r = 0$ ein strenges lokales Maximum.

Bei den Punkten auf K handelt es sich also um (keine strengen) absolute Minima.

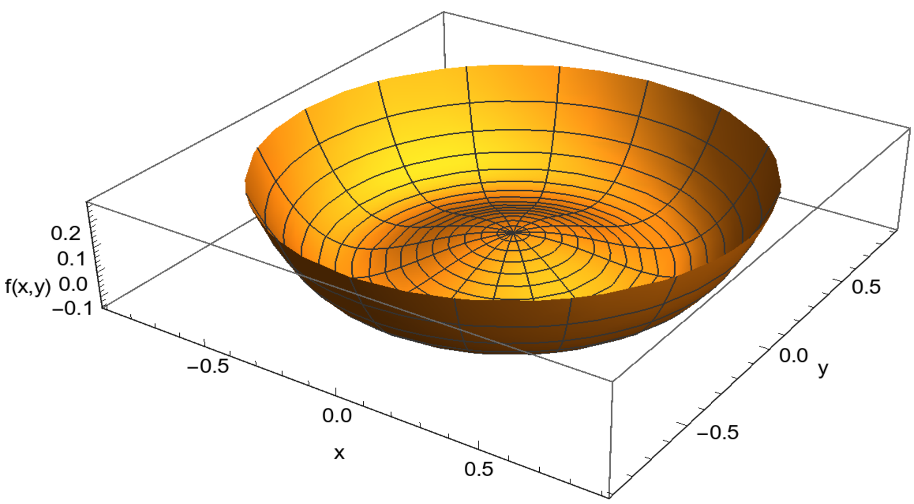

Bild 15 b): $\quad f(x,y) = 2(x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2$

c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ Die Schlussweise

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^T=(0,0)^T \quad\Rightarrow\quad (x_0,y_0)=(0,0)$$

ist nicht zulässig, da grad f in $(0,0)$ nicht existiert. Es gibt also keine stationären Punkte. Dennoch bleibt $(0,0)$ natürlich strenges globales Minimum, wegen $f(0,0)=0$ und $f(x,y)>0 \Leftrightarrow (x,y)\neq(0,0)$.

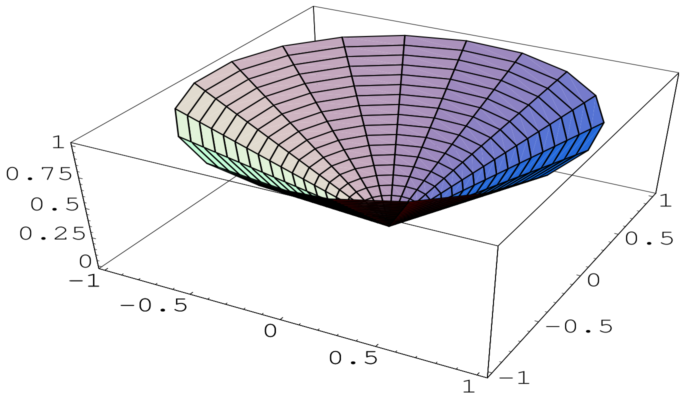

Bild 15 c): $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=x\sin y$
$\operatorname{grad} f(x,y)=(\sin y, x\cos y)^T=(0,0)^T$

$$\Rightarrow\quad \sin y=0 \quad\Rightarrow\quad y_k=k\pi \quad\Rightarrow\quad \cos(k\pi)=(-1)^k \quad\Rightarrow\quad x_k=0$$

Die stationären Punkte lauten also $(x_k,y_k)=(0,k\pi)$

$$\boldsymbol{H}\,f(x,y)=\begin{pmatrix}0 & \cos y\\ \cos y & -x\sin y\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{H}\,f(0,k\pi)=\begin{pmatrix}0 & (-1)^k\\ (-1)^k & 0\end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

Damit ist $\boldsymbol{H}\,f(0,k\pi)$ indefinit und alle stationären Punkte sind Sattelpunkte.

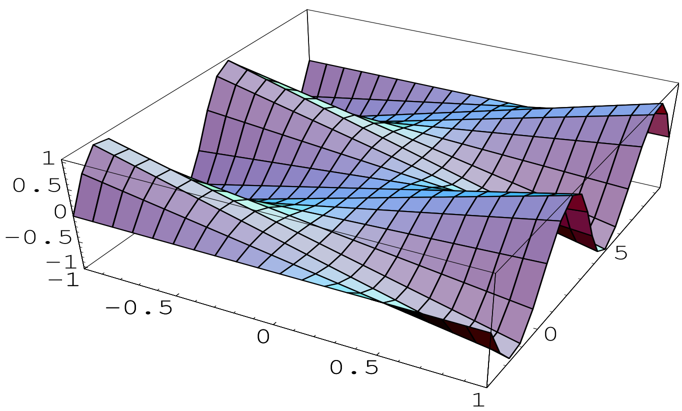

Bild 15 d): $f(x,y)=x\sin y$

Aufgabe 16:

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 9x^4 - 12x^2y + 4y^2$.

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.

b) Man versuche, die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein strenges lokales Minimum besitzt.

d) Man klassifiziere alle stationären Punkte von f .

e) Man zeichne die Funktion beispielweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Lösung:

a) $\mathrm{grad} f(x,y) = (3x^2 - 2y)(12x, -4)^T = (0,0)^T$

Auf der Parabel $3x^2 - 2y = 0$ sind alle Punkte stationär.

b) $\boldsymbol{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 12(9x^2-2y) & -24x \\ -24x & 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{H}\, f(x, 3x^2/2) = \begin{pmatrix} 72x^2 & -24x \\ -24x & 8 \end{pmatrix}$

Wegen $p(\lambda) = (72x^2-\lambda)(8-\lambda)-24^2x^2 = \lambda(\lambda-(8+72x^2))$ lauten die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 8 + 72x^2$.

Die Hessematrix ist also positiv semidefinit und das hinreichende Kriterium ist nicht anwendbar.

Die notwendige Bedingung lässt für die stationären Punkte auf der Parabel $3x^2 - 2y = 0$ dann noch die Möglichkeiten Minimum oder Sattelpunkt zu.

c) Auf den Geraden $x = 0$ bzw. $y = 0$ wird die Funktion f beschrieben durch

$$g(y) := f(0,y) = 4y^2 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(x) := f(x,0) = 9x^4.$$

Für $y = 0$ bzw. $x = 0$ besitzen diese Funktionen ein strenges lokales Minimum.

Alle anderen Ursprungsgeraden können durch $y = ax$ mit $a \neq 0$ dargestellt werden, und die Funktion wird dann durch

$$h(x) := f(x, ax) = 9x^4 - 12ax^3 + 4a^2x^2$$

beschrieben. Man erhält

$$h'(x) = 36x^3 - 36ax^2 + 8a^2x \quad \Rightarrow \quad h'(0) = 0$$

und

$$h''(x) = 108x^2 - 72ax + 8a^2 \quad \Rightarrow \quad h''(0) = 8a^2 > 0\,.$$

Damit besitzt h für $x = 0$ ein strenges lokales Minimum.

Dies lässt jedoch nicht den Schluss zu, dass f in $(0,0)$ ein strenges lokales Minimum besitzt.

d) Wegen

$$f(x,y) = 9x^4 - 12x^2y + 4y^2 = (3x^2 - 2y)^2 \geq 0$$

gilt $f(x, 3x^2/2) = 0$. Also sind alle Punkte auf der Parabel $3x^2 - 2y = 0$ globale aber nicht strenge Minima .

e) MATLAB-Befehle

```
ezsurf('9*x^4 -12*x^2*y +4*y^2',[-1.5,1.5,-2.5,6])
ezcontour('9*x^4 -12*x^2*y +4*y^2',[-1,1,-1.6,3])
```

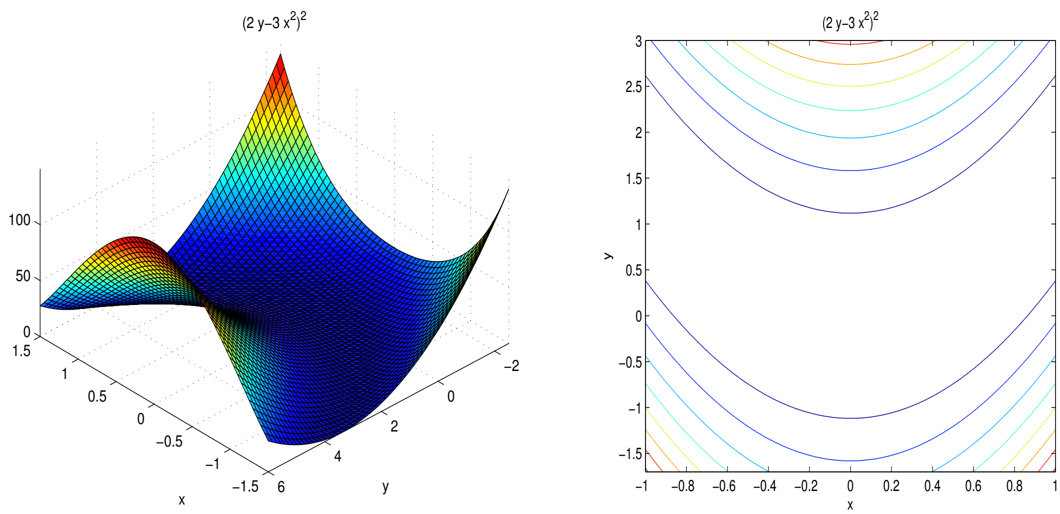

Bild 16 $\quad f(x,y) = 9x^4 - 12x^2y + 4y^2$

Abgabetermin: 2.12. - 6.12.2019 (zu Beginn der Übung)