Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 9:

a) Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\boldsymbol{f}_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\boldsymbol{f}_2} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(rs) \\ v = e^r + s \\ w = 1 - 2s^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uw \\ vw \end{pmatrix}.$$

b) Man berechne die Jacobi-Matrix von:

$$h: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\boldsymbol{f}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \mapsto g(u,v).$$

Lösung:

a) Kettenregel: $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_2 \circ \boldsymbol{f}_1$

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}_1(r,s) = \begin{pmatrix} s\cos(rs) & r\cos(rs) \\ e^r & 1 \\ 0 & -6s^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}_2(u,v,w) = \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & w & v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(r,s) &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}_2 \circ \boldsymbol{f}_1)(r,s) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(r,s)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}_1(r,s) \\
&= \begin{pmatrix} w(r,s) & 0 & u(r,s) \\ 0 & w(r,s) & v(r,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\cos(rs) & r\cos(rs) \\ e^r & 1 \\ 0 & -6s^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w(r,s)s\cos(rs) & w(r,s)r\cos(rs) - 6u(r,s)s^2 \\ w(r,s)e^r & w(r,s) - 6v(r,s)s^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-2s^3)s\cos(rs) & (1-2s^3)r\cos(rs) - 6s^2\sin(rs) \\ e^r(1-2s^3) & 1 - 2s^3 - 6(e^r+s)s^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

direkt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(r,s)) &= \boldsymbol{f}_2(u(r,s), v(r,s), w(r,s)) \\ &= \boldsymbol{f}(r,s) = \begin{pmatrix} \sin(rs)(1-2s^3) \\ (e^r+s)(1-2s^3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}\,(r,s) = \begin{pmatrix} s\cos(rs)(1-2s^3) & r\cos(rs)(1-2s^3) - 6s^2\sin(rs) \\ e^r(1-2s^3) & (1-2s^3) - 6s^2(e^r+s) \end{pmatrix}$$

b) Kettenregel: $\quad h = g \circ \boldsymbol{f} \quad$ bzw. $\quad h(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}\,(x,y) = \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}\,g(u,v) = (g_u(u,v), g_v(u,v))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \boldsymbol{J}h(x,y) = (h_x(x,y), h_y(x,y)) = \boldsymbol{J}g(u,v)\cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) \\ &= (g_u(u,v), g_v(u,v)) \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix} \\ &= (g_u(u,v)\cdot u_x(x,y) + g_v(u,v)\cdot v_x(x,y), \\ &\quad g_u(u,v)\cdot u_y(x,y) + g_v(u,v)\cdot v_y(x,y)) \\ &= (g_u u_x + g_v v_x\ ,\ g_u u_y + g_v v_y) \end{aligned}$$

Wir notieren also folgenden Spezialfall der Kettenregel in Kurzform:

$$h_x = \frac{\partial g(u(x,y), v(x,y))}{\partial x} = g_u u_x + g_v v_x$$

$$h_y = \frac{\partial g(u(x,y), v(x,y))}{\partial y} = g_u u_y + g_v v_y\ .$$

Aufgabe 10:

Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ in den durch die Gerade $3y - 5x = 7$ gegebenen Richtungen.

Lösung:

Da f stetig partiell differenzierbar ist, kann die Richtungsableitung folgendermaßen berechnet werden:

$$D_{\boldsymbol{h}} f(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \boldsymbol{h} = (y_0, x_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = y_0 h_1 + x_0 h_2$$

Die Gerade $3y - 5x = 7$ in Parameterform lautet:

$$\boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 7/3 + 5x/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des Anstieges ist der in der Richtungsableitung verwendete Richtungsvektor $\boldsymbol{h}$ aus der Geradengleichung noch zu normieren:

$$\boldsymbol{h} = \pm \frac{1}{\sqrt{34}/3} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der An- bzw. Abstieg im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ lautet daher

$$D_{\boldsymbol{h}} f(1, -1) = -h_1 + h_2 = \pm \left(\frac{5}{\sqrt{34}} - \frac{3}{\sqrt{34}} \right) = \pm \frac{2}{\sqrt{34}} \,.$$

Aufgabe 11:

a) Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\mathbf{\Phi}\,(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ 3r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit $(r,\varphi) \in Q :=]0,1] \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(i) Man berechne $\boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}\,(r,\varphi)$ und $\det(\boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}\,(r,\varphi))$ sowie

(ii) $\mathbf{\Phi}^{-1}(x,y)$, $\boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}^{-1}(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}^{-1}(x,y))$.

(iii) Man zeichne Q und $\mathbf{\Phi}\,(Q)$.

b) Man zeichne den folgenden Körper und gebe die zugehörige Kugelkoordinatendarstellung an

$$K = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16 \ \wedge\ 0 \le y\right\}.$$

Lösung:

a) (i) $\boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}\,(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{pmatrix}$,

$\det(\boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}\,(r,\varphi)) = 6r$

(ii) Bei $\mathbf{\Phi}$ handelt es sich um Ellipsenkoordinaten, d.h. es gilt

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = r^2 \overset{0<r\le 1}{\Rightarrow} r(x,y) = \sqrt{x^2/4 + y^2/9} = \left(\sqrt{9x^2+4y^2}\right)/6$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3r\sin\varphi}{2r\cos\varphi} = \frac{3}{2}\tan\varphi \overset{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} \varphi(x,y) = \arctan\frac{2y}{3x}$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} r(x,y) \\ \varphi(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{9x^2+4y^2}\right)/6 \\ \arctan\frac{2y}{3x} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 9x}{2\cdot 6\sqrt{9x^2+4y^2}} & \frac{2\cdot 4y}{2\cdot 6\sqrt{9x^2+4y^2}} \\ -\frac{2y}{3x^2(1+(2y/3x)^2)} & \frac{2}{3x(1+(2y/3x)^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x}{2\sqrt{9x^2+4y^2}} & \frac{2y}{3\sqrt{9x^2+4y^2}} \\ -\frac{6y}{9x^2+4y^2} & \frac{6x}{9x^2+4y^2} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{J}\ \mathbf{\Phi}^{-1}(x,y)\right)$$

$$= \frac{3x}{2\sqrt{9x^2+4y^2}} \cdot \frac{6x}{9x^2+4y^2} - \frac{2y}{3\sqrt{9x^2+4y^2}} \cdot \left(-\frac{6y}{9x^2+4y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9x^2+4y^2}}$$

Alternativ:

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x,y) = \left(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}\,(r(x,y),\varphi(x,y))\right)^{-1} = \frac{1}{6r}\begin{pmatrix} 3r\cos\varphi & 2r\sin\varphi \\ -3\sin\varphi & 2\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6r}\begin{pmatrix} 3x/2 & 2y/3 \\ -y/r & x/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x}{2\sqrt{9x^2+4y^2}} & \frac{2y}{3\sqrt{9x^2+4y^2}} \\ -\frac{6y}{9x^2+4y^2} & \frac{6x}{9x^2+4y^2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}^{-1}(x,y)) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\Phi}\,(r,\varphi))} = \frac{1}{6r} = \frac{1}{\sqrt{9x^2+4y^2}}\,.$$

(iii)

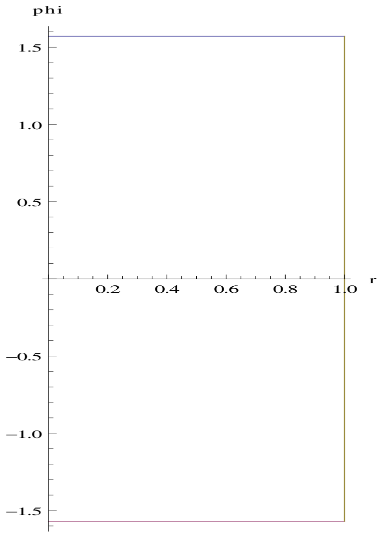

Bild 11.1: Q

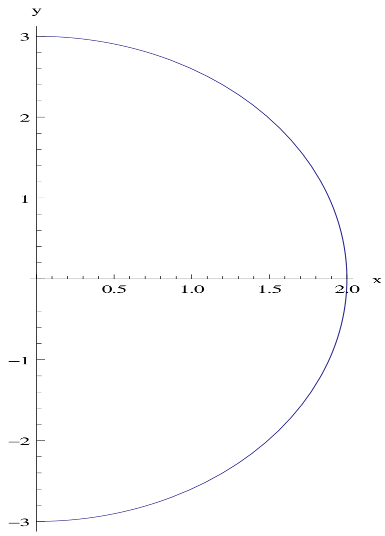

Bild 11.2: $\boldsymbol{\Phi}\,(Q)$

b) $4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16$
ist eine Hohlkugel mit Radius $2 \le r \le 4$.

$0 \le y$ ergibt dann eine halbe Hohlkugel.

Die Kugelkoordinaten lauten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}\,(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

mit $2 \le r \le 4, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

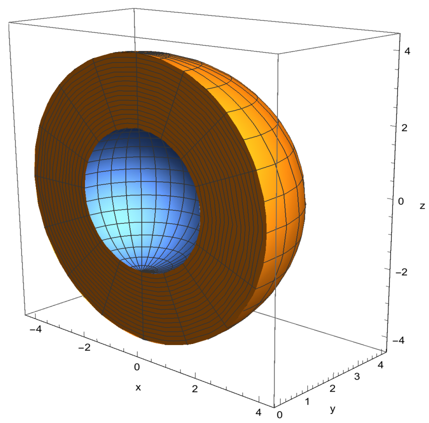

Bild 11.3: halbe Hohlkugel

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

a) Man berechne das Taylor-Polynom ersten Grades $T_1(x,y)$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1/4, 0)$.

b) Man zeichne f und die Tangentialebene im Quadrat $[-2,2] \times [-2,2]$.

c) Man berechne den Abstand von f zu T_1 im Punkt $(0,0)$.

Lösung:

a) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \quad \Rightarrow \quad (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (-2xe^{-(x^2+y^2)}, -2ye^{-(x^2+y^2)})$

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= f(-1/4,0) + f_x(-1/4,0)(x+1/4) + f_y(-1/4,0)y \\ &= e^{-1/16} + e^{-1/16}(x+1/4)/2 \end{aligned}$$

b) MATLAB-Befehle für die Flächenplots:

```
>>ezgraph3('surf','x','y','exp(-(x^2+y^2))',[-2,2,-2,2])
>>hold
>>ezgraph3('surf','x','y','exp(-1/16)+exp(-1/16)*(x+1/4)/2',[-2,2,-2,2])
```

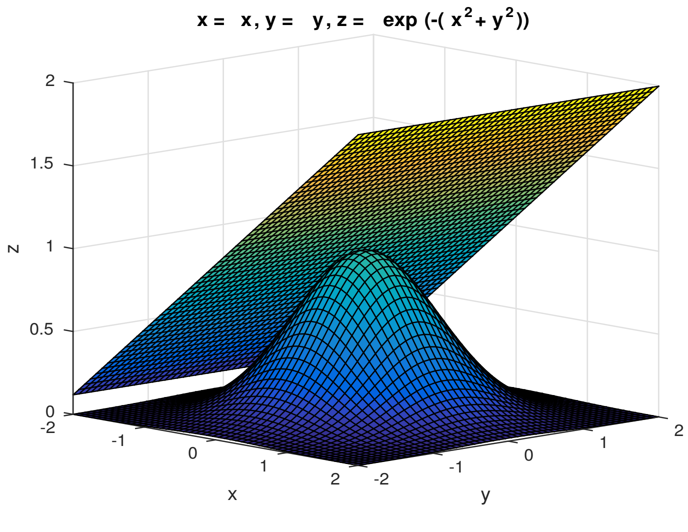

Bild 12: $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ und $T_1(x,y) = e^{-1/16} + e^{-1/16}(x+1/4)/2$

c) $|f(0,0) - T_1(0,0)| = |1 - (e^{-1/16} + e^{-1/16}/8)| = 0.0568397$

Abgabetermin: 18.11. - 22.11.2019 (zu Beginn der Übung)