Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 5:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ für eine Ortsvariable x und mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ von der Funktion

$$u(x,t) = 2\sin(x+ct) + 3e^{x-ct}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x,y) = e^{-x}\sin(y) + (x+5)(y-6)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Lösung:

a) $u(x,t) = 2\sin(x+ct) + 3e^{x-ct}$

$u_t(x,t) = 2c\cos(x+ct) - 3ce^{x-ct}$,

$u_x(x,t) = 2\cos(x+ct) + 3e^{x-ct}$,

$u_{tt}(x,t) = -2c^2\sin(x+ct) + 3c^2e^{x-ct}$,

$u_{xx}(x,t) = -2\sin(x+ct) + 3e^{x-ct}$,

Damit löst u die Wellengleichung $u_{tt} = c^2\Delta u$.

b) $u(x,y) = e^{-x}\sin(y) + (x+5)(y-6)$

$u_x(x,y) = -e^{-x}\sin(y) + y - 6$,

$u_y(x,y) = e^{-x}\cos(y) + x + 5$

$u_{xx}(x,y) = e^{-x}\sin(y)$,

$u_{yy}(x,y) = -e^{-x}\sin(y)$

Damit löst u die Laplace-Gleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Aufgabe 6:

a) Man berechne Divergenz und Rotation für die Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

(i) $\boldsymbol{h}(x, y, z) = (e^{x+y+z}, e^{x+y+z}, e^{x+y+z})^T$,

(ii) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T$,

(iii) $2\,\boldsymbol{h}(x, y, z) - \boldsymbol{u}(x, y, z)$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 3x^2)^T .$$

(i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

(ii) zeichne das Vektorfeld und einige Stromlinien im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Lösung:

a) (i) $\boldsymbol{h}(x, y, z) = (e^{x+y+z}, e^{x+y+z}, e^{x+y+z})^T$,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = h_{1x} + h_{2y} + h_{3z} = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} = 3e^{x+y+z}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = (h_{3y} - h_{2z}, h_{1z} - h_{3x}, h_{2x} - h_{1y})^T$$
$$= (e^{x+y+z} - e^{x+y+z}, e^{x+y+z} - e^{x+y+z}, e^{x+y+z} - e^{x+y+z})^T = \mathbf{0}$$

alternativ:

$$\boldsymbol{h}(x, y, z) = \varphi(x, y, z)\,\boldsymbol{v} \quad \text{mit} \quad \varphi(x, y, z) = e^{x+y+z} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält

$\nabla\varphi = \boldsymbol{h}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ und

$(\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{v} = (\varphi(x, y, z)\,\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = \varphi(x, y, z)(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$.

Damit ergibt sich

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) + \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 3e^{x+y+z}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} + \varphi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} .$$

(ii) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T$,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = u_{1x} + u_{2y} + u_{3z} = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = (u_{3y} - u_{2z}, u_{1z} - u_{3x}, u_{2x} - u_{1y})^T = (x - x, y - y, z - z) = \mathbf{0}$$

(iii) $\operatorname{div}(2\,\boldsymbol{h}(x, y, z) - \boldsymbol{u}(x, y, z)) = 2\operatorname{div} \boldsymbol{h} - \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 6e^{x+y+z}$

$\operatorname{rot}(2\,\boldsymbol{h}(x, y, z) - \boldsymbol{u}(x, y, z)) = 2\operatorname{rot} \boldsymbol{h} - \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

b) (i) $\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 3x^2)^T$

$\operatorname{div} \boldsymbol{g} = u_x + v_y = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{g} = v_x - u_y = 6x - 0 = 6x$

(ii) Die MATLAB-Befehle für das Vektorfeld lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.2:1);
U=X.^0;
V=3*X.^2;
quiver(X,Y,U,V)
```

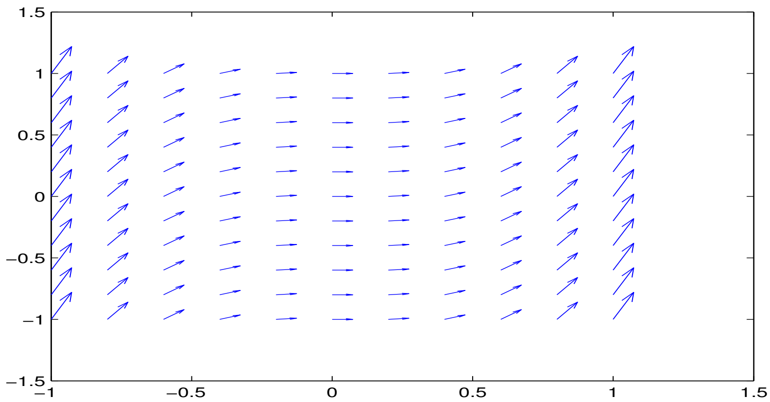

Bild 6 b) Vektorfeld $\boldsymbol{g}\,(x,y) = (1, 3x^2)^T$

Stromlinien sind die Kurven $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$, deren Tangentialvektoren durch das Vektorfeld $\boldsymbol{g}$ gegeben sind

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}\,(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3(x(t))^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+a \\ (t+a)^3 + b \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^3 + b \end{pmatrix}$$

Alternativ $y'(x) = \dfrac{v(x, y(x))}{u(x, y(x))}$: $\quad y'(x) = \dfrac{3x^2}{1} \Rightarrow y(x) = x^3 + b, \quad b \in \mathbb{R}$

Die MATLAB-Befehle für die Stromlinien lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.2:1);
Z = X.^3-Y;
contour(X,Y,Z)
```

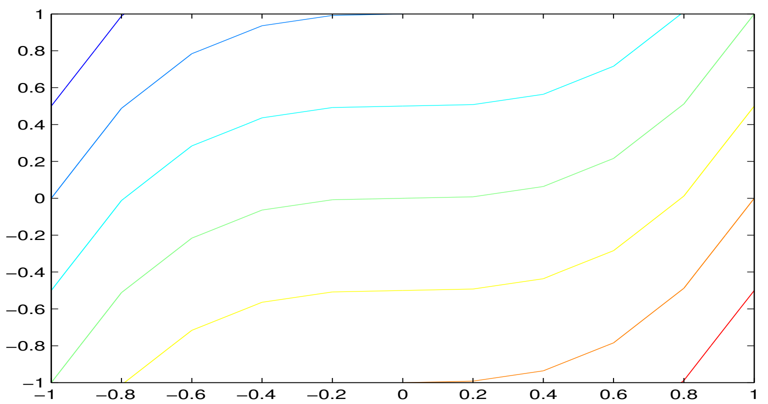

Bild 6 b) Stromlinien $\mathbf{c}(x) = (x, x^3 + b)^T$, $b \in \mathbb{R}$

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-0.05, 0.05] \times [-0.05, 0.05]$.

b) Man überprüfe, ob f stetig ist.

c) Man berechne $\boldsymbol{J}\, f(x,y)$.

d) Man überprüfe, ob f total differenzierbar ist.

e) Sind die partiellen Ableitungen stetig?

Lösung:

a)

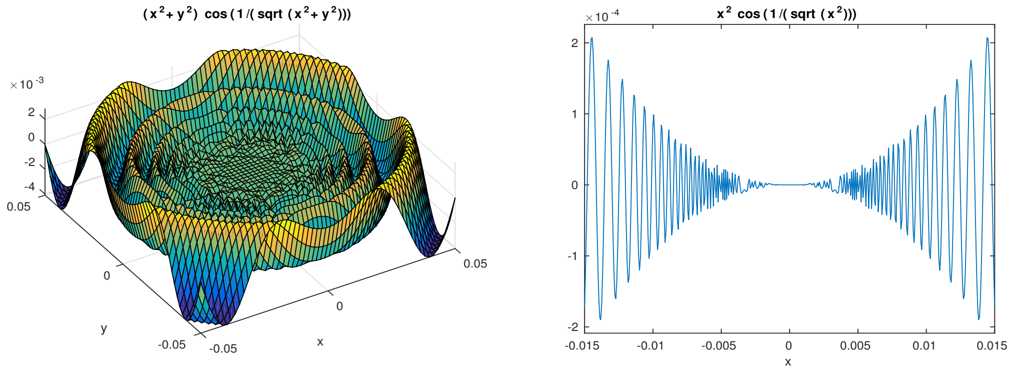

Bild 7: $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $f(x,0) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}\right)$

MATLAB-Befehle für den Flächen- und Funktionsplot:

```
ezsurf('(x^2+y^2)*cos(1/(sqrt(x^2+y^2)))',[-0.05,0.05,-0.05,0.05])
ezplot('x^2*cos(1/(sqrt(x^2)))',[-0.015,0.015])
```

b) Als Komposition stetiger Funktionen ist f stetig für $(x,y) \neq (0,0)$.

Die Stetigkeit in $(x,y) = (0,0)$ erhält man durch

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$$

Also gilt $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Damit ist f stetig in $\mathbb{R}^2$.

c) Die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}\, f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ lautet für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\boldsymbol{J}\, f = \left(2x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Für $(x,y) = (0,0)$ erhält man $\boldsymbol{J}\, f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$, denn

$$0 \leq |f_x(0,0)| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{h^2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right) - 0}{h}\right| \leq \lim_{h\to 0}|h| = 0$$

Also gilt $f_x(0,0) = 0$. Analog berechnet man $f_y(0,0) = 0$.

d) f ist nach c) eine C^1 -Funktion für $(x,y) \neq (0,0)$ und in diesem Fall total differenzierbar. Für $(x,y) = (0,0)$ erhält man

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \boldsymbol{J}\, f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0.$$

Damit ist f total differenzierbar in $\mathbb{R}^2$.

e) $f_x(x,y)$ und $f_y(x,y)$ sind nur in $(x,y) = (0,0)$ unstetig, denn die folgenden Grenzwerte existieren nicht

$$\lim_{n\to\infty} f_x\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}\right) + \frac{\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cos(n)}{n} + \sin(n),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_y\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cos(n)}{n} + \sin(n)\,.$$

Aufgabe 8:

a) Man berechne die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

(i) $f(x,y,z) = \sqrt{z}\sin(x+y) + e^{y+z}$ und $x, y \in \mathbb{R}\,,\ z \in \mathbb{R}^+\,,$

(ii) $\boldsymbol{g}\,(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ und $t \in \mathbb{R}\,,$

(iii) $\boldsymbol{h}\,(x,y) = (x+y^2, 3x^2+4y)^T$ und $x, y \in \mathbb{R}\,,$

(iv) $\boldsymbol{u}\,(t,x,y,z) = (x - e^{y-t}, 3z - xt^2, t + 5x + y^2 + 4z)^T$ und $t, x, y, z \in \mathbb{R}\,.$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y,z) = xz - y^2$$

mit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Man bestimme für $(x_0, y_0, z_0) = (3, -1, 2)$ den Funktionswert von f, berechne eine Funktionswertnäherung für $f(3.1, -1.2, 1.9)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials und vergleiche diese mit $f(3.1, -1.2, 1.9)$.

Lösung:

a) (i) $f(x,y,z) = \sqrt{z}\sin(x+y) + e^{y+z}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}\, f(x,y,z) &= (f_x, f_y, f_z) = \operatorname{grad} f(x,y,z)\\ &= \left(\sqrt{z}\cos(x+y), \sqrt{z}\cos(x+y) + e^{y+z}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin(x+y) + e^{y+z}\right)\end{aligned}$$

(ii) $\boldsymbol{g}\,(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}\,(t) = (g_1'(t), g_2'(t))^T = \boldsymbol{g}\,'(t) = (-\sin(t), \cos(t))^T$$

(iii) $\boldsymbol{h}\,(x,y) = (x+y^2, 3x^2+4y)^T$ und $x, y \in \mathbb{R}\,,$

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h}\,(x,y) = \begin{pmatrix} h_{1x} & h_{1y} \\ h_{2x} & h_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 6x & 4 \end{pmatrix}$$

(iv) $\boldsymbol{u}\,(t,x,y,z) = (x - e^{y-t}, 3z - xt^2, t + 5x + y^2 + 4z)^T$ und $t, x, y, z \in \mathbb{R}\,,$

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{u}\,(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} u_{1t} & u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2t} & u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3t} & u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{y-t} & 1 & -e^{y-t} & 0 \\ -2xt & -t^2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2y & 4 \end{pmatrix}$$

b) Für $f(x,y,z) = xz - y^2$ und $\boldsymbol{x}^0 = (3,-1,2)^T$ erhält man

$$f(\boldsymbol{x}^0) = f(3,-1,2) = 3 \cdot 2 - (-1)^2 = 5.$$

Auswertung des vollständigen Differentials

$$\boldsymbol{d}\, f(\boldsymbol{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)dx_n$$

durch $\boldsymbol{d}\, f(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{J}\, f(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)$.

Für $\boldsymbol{x} = (3.1, -1.2, 1.9)^T$ folgt $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0 = (0.1, -0.2, -0.1)^T$.

$\boldsymbol{J}\, f(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z) = (z, -2y, x) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(3,-1,2) = (2,2,3)$

Näherungsweise Berechnung von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ durch

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{x}^0) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)$$

$$\Rightarrow \quad f(3.1, -1.2, 1.9) \approx 5 + (2,2,3)\begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix} = 5 - 0.5 = 4.5$$

Die exakte Auswertung:

$f(x,y,z) = xz - y^2 \quad \Rightarrow \quad f(3.1, -1.2, 1.9) = 3.1 \cdot 1.9 - (-1.2)^2 = 4.45$

Der Abstand zur Näherung: $|f(3.1, -1.2, 1.9) - 4.5| = |4.45 - 4.5| = 0.05$

Abgabetermin: 4.11. - 8.11.2019 (zu Beginn der Übung)