

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2

#### Aufgabe 5:

- a) Man zeige, dass die Wellengleichung  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  für eine Ortsvariable  $x$  und mit einer Konstanten  $c \in \mathbb{R}$  von der Funktion

$$u(x, t) = 2 \sin(x + ct) + 3e^{x-ct}$$

gelöst wird.

- b) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x, y) = e^{-x} \sin(y) + (x + 5)(y - 6)$$

die Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  löst.

#### Aufgabe 6:

- a) Man berechne Divergenz und Rotation für die Vektorfelder mit  $x, y, z \in \mathbb{R}$

(i)  $\mathbf{h}(x, y, z) = (e^{x+y+z}, e^{x+y+z}, e^{x+y+z})^T$ ,

(ii)  $\mathbf{u}(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T$ ,

(iii)  $2\mathbf{h}(x, y, z) - \mathbf{u}(x, y, z)$ .

- b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 3x^2)^T.$$

- (i) Man berechne  $\operatorname{div} \mathbf{g}$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{g}$  und

- (ii) zeichne das Vektorfeld und einige Stromlinien im Bereich  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Man zeichne die Funktion im Bereich  $[-0.05, 0.05] \times [-0.05, 0.05]$ .
- Man überprüfe, ob  $f$  stetig ist.
- Man berechne  $\mathbf{J} f(x, y)$ .
- Man überprüfe, ob  $f$  total differenzierbar ist.
- Sind die partiellen Ableitungen stetig?

**Aufgabe 8:**

- Man berechne die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften
  - $f(x, y, z) = \sqrt{z} \sin(x + y) + e^{y+z}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}^+$ ,
  - $\mathbf{g}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$  und  $t \in \mathbb{R}$ ,
  - $\mathbf{h}(x, y) = (x + y^2, 3x^2 + 4y)^T$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
  - $\mathbf{u}(t, x, y, z) = (x - e^{y-t}, 3z - xt^2, t + 5x + y^2 + 4z)^T$  und  $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ .
- Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = xz - y^2$$

mit  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Man bestimme für  $(x_0, y_0, z_0) = (3, -1, 2)$  den Funktionswert von  $f$ , berechne eine Funktionswertnäherung für  $f(3.1, -1.2, 1.9)$  unter Verwendung des vollständigen Differentials und vergleiche diese mit  $f(3.1, -1.2, 1.9)$ .

**Abgabetermin:** 4.11. - 8.11.2019 (zu Beginn der Übung)