Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - 2|x|$.

a) Man zeichne die 1-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f .

b) Man berechne die Fourier-Reihe dieser 1-periodischen Fortsetzung.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_5(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Lösung:

a)

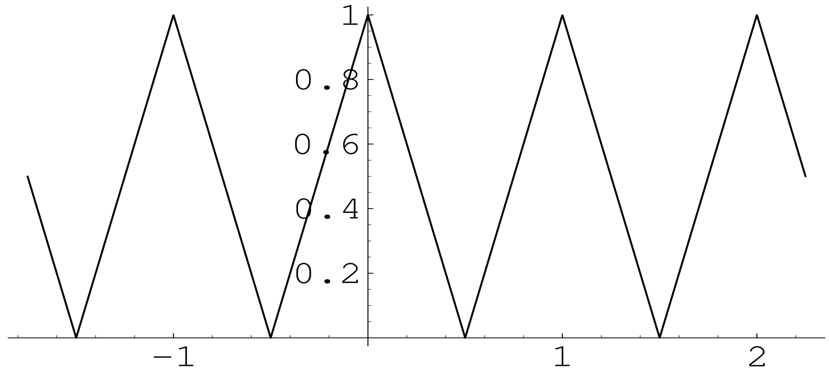

Bild 1 a): 1-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Da f gerade ist

$$0 \le x \le 1/2: \quad f(x) = 1 - 2|x| = 1 - 2|-x| = f(-x),$$

gilt $b_k = 0$.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 1 \Rightarrow \omega = 2\pi/T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = 4\int_0^{1/2} 1 - 2x\,dx = 4(x - x^2)\Big|_0^{1/2} = 1$$

$$a_{k\ge 1} = 4\int_0^{1/2} (1-2x)\cos(2k\pi x)\,dx$$

$$= 4\left\{ \frac{(1-2x)\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\Big|_0^{1/2} + \frac{2}{2k\pi}\int_0^{1/2} \sin(2k\pi x)\,dx \right\}$$

$$= -\frac{8\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\Big|_0^{1/2} = -\frac{2((-1)^k - 1)}{(k\pi)^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{(k\pi)^2} & k = 2n-1 \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe $\quad F_f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos((2n-1)2\pi x)}{(2n-1)^2}$.

c)

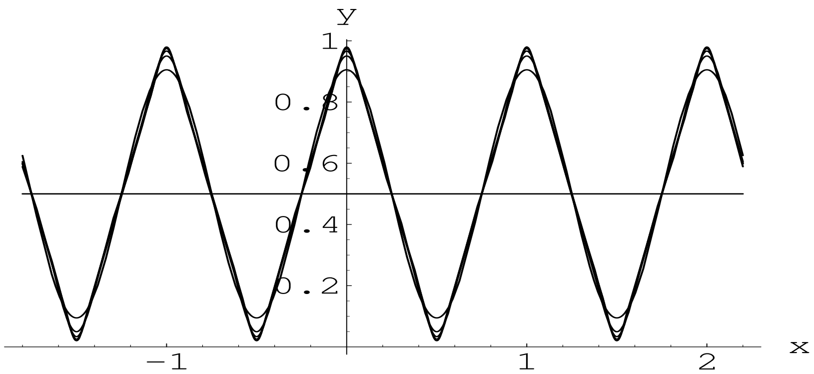

Bild 1 c): Partialsummen $S_0(x), \dots, S_5(x)$

d) Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f. Es gilt also

$$1 = f(0) = F_f(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die 4π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2\pi \le x \le 0 \quad , \\ (x-\pi)^2 - \pi^2 & , \quad 0 \le x \le 2\pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die 4π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion im Intervall $[-4\pi, 6\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Lösung:

a)

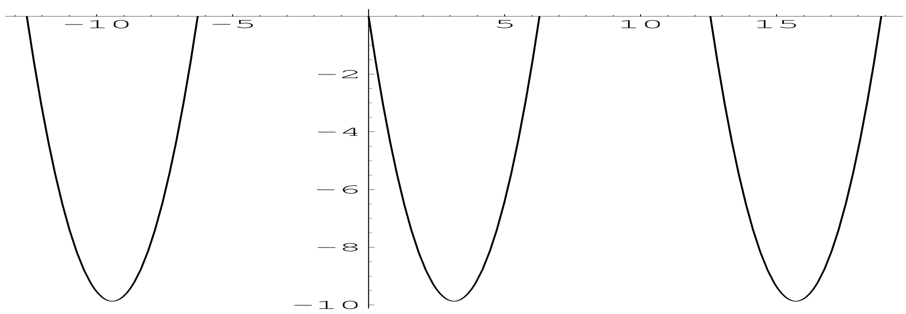

Bild 2 a): 4π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 4\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi/T = 1/2$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} (x-\pi)^2 - \pi^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(x-\pi)^3}{3} - \pi^2 x \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - 2\pi^3 + \frac{\pi^3}{3} \right) = -\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\cos(kx/2)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}((x-\pi)^2-\pi^2)\cos(kx/2)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2((x-\pi)^2-\pi^2)\sin(kx/2)}{k} + \frac{8(x-\pi)\cos(kx/2)}{k^2}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{16\sin(kx/2)}{k^3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4((-1)^k+1)}{k^2} = \begin{cases} 0 & k \ \text{ungerade} \\ \dfrac{8}{k^2} & k \ \text{gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\sin(kx/2)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}((x-\pi)^2-\pi^2)\sin(kx/2)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2((x-\pi)^2-\pi^2)\cos(kx/2)}{k} + \frac{8(x-\pi)\sin(kx/2)}{k^2}\right. \\
&\qquad \left. +\frac{16\cos(kx/2)}{k^3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{8((-1)^k-1)}{k^3\pi} = \begin{cases} -\dfrac{16}{k^3\pi} & k \ \text{ungerade} \\ 0 & k \ \text{gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = -\frac{\pi^2}{3} + 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}\cos(kx) - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin((2k-1)x/2)\,.$$

c)

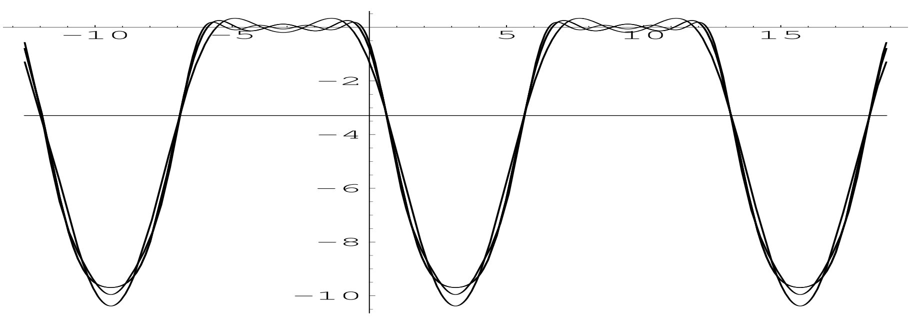

Bild 2 c): Partialsummen $S_0(x),\ldots,S_3(x)$

d) Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x=0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f. Es gilt also

$$0 = f(0) = F_f(0) = -\frac{\pi^2}{3} + 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Aufgabe 3:

Man berechne die Gradienten für folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, b) $f(x,y) = x^2 - 4y$,

c) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$, d) $f(x,y) = x - 4y$

und zeichne ein Bild im Bereich $[-2,2] \times [-2,2]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion f angezeigt werden. Dies sind Linien, der Form
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 8y)$

Ein MATLAB-Befehl für den Höhenlinienplot lautet:

```
ezcontour('x^2 + 4*y^2',[-2,2,-2,2])
```

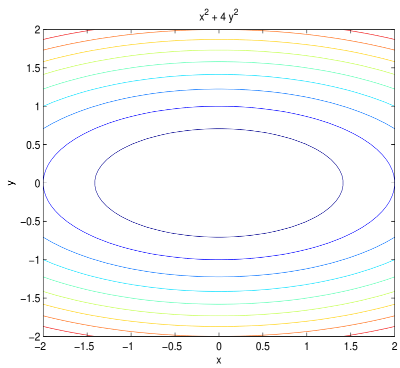

Bild 3 a) $x^2 + 4y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = x^2 - 4y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -4)$

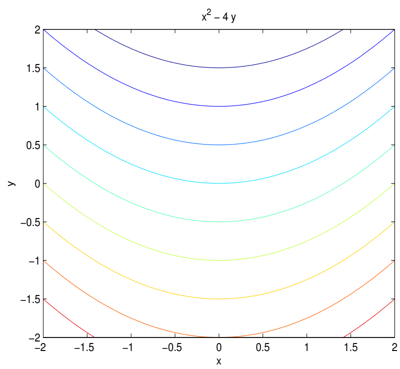

Bild 3 b) $x^2 - 4y = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

c) $f(x,y) = x^2 - 4y^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -8y)$

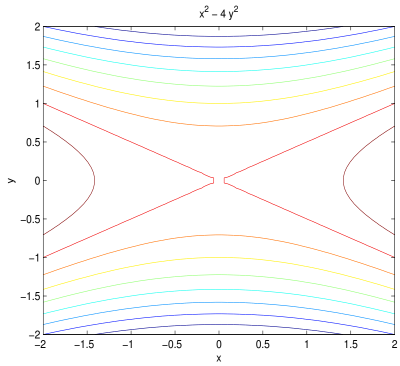

Bild 3 c) $\quad x^2 - 4y^2 = c \quad$ mit $\quad c \in \mathbb{R}$

d) $f(x,y) = x - 4y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (1, -4)$

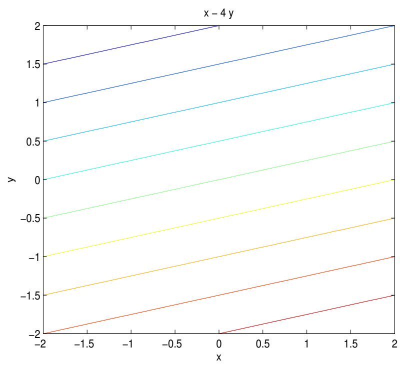

Bild 3 d) $\quad x - 4y = c \quad$ mit $\quad c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 5x^2 - 3y^2$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Man visualisiere den Graph von f über dem Parametergebiet $[-3,3]\times[-4,4]$.

c) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch

$$z = z(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (3, -4)$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(3, -4)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\operatorname{grad} f(3,-4)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(3, -4)$.

Lösung:

a) $f(x,y) = 5x^2 - 3y^2$, $\quad f_x(x,y) = 10x$, $\quad f_y(x,y) = -6y$,

$f_{xx}(x,y) = 10$, $\quad f_{xy}(x,y) = 0$, $\quad f_{yy}(x,y) = -6$,

$f_{xxx}(x,y) = 0$, $\quad f_{xxy}(x,y) = 0$, $\quad f_{xyy}(x,y) = 0$, $\quad f_{yyy}(x,y) = 0$

b) Ein MATLAB-Befehl für den Flächenplot lautet:

```
ezsurf('5*x^2-3*y^2',[-3,3,-4,4])
```

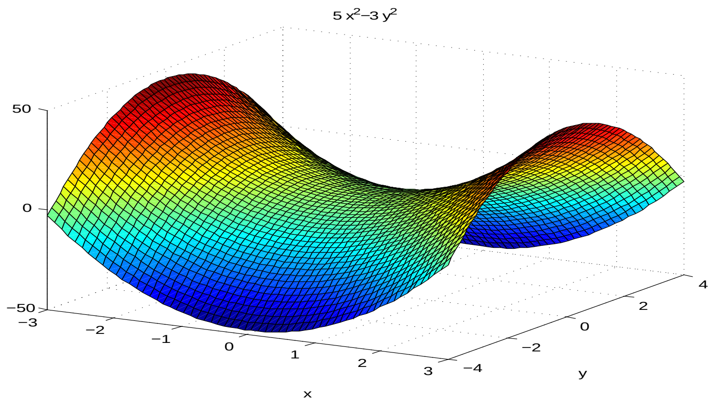

Bild 4 $\quad f(x,y) = 5x^2 - 3y^2$

c) $f(3,-4) = 5 \cdot 3^2 - 3(-4)^2 = -3\,,\quad f_x(3,-4) = 30\,,\quad f_y(3,-4) = 24$

Tangentialebene : $\quad z = -3 + 30(x-3) + 24(y+4)$

d) Es ist $f(3,-4) = -3$. Damit wird die Höhenlinie im Punkt $(3,-4)$ beschrieben durch die implizite Gleichung

$$-3 = f(x, y(x)) = 5x^2 - 3y^2(x)\,.$$

Man erhält durch Auflösen $y(x) = \pm\sqrt{5x^2/3+1}$.
Wegen $y(3) = -4$ kommt nur $y(x) = -\sqrt{5x^2/3+1}$ in Frage.
Eine die Höhenlinie parametrisierende Kurve ist daher gegeben durch

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{5x^2/3+1} \end{pmatrix}.$$

e) $\operatorname{grad} f(3,-4) = (f_x(3,-4), f_y(3,-4)) = (30, 24)$
Tangentialrichtung der Höhenlinie

$$\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{10x}{6\sqrt{5x^2/3+1}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}'(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{30}{24} \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{grad} f(3,-4) \cdot \mathbf{c}'(3)}{||\operatorname{grad} f(3,-4)||_2\, ||\mathbf{c}'(3)||_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Abgabetermin: 21.10. - 25.10.2019 (zu Beginn der Übung)