

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 1

#### Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion  $f : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1 - 2|x|$ .

- Man zeichne die 1-periodische direkte Fortsetzung der Funktion  $f$ .
- Man berechne die Fourier-Reihe dieser 1-periodischen Fortsetzung.
- Man zeichne die Partialsummen  $S_0(x), \dots, S_5(x)$  der berechneten Fourierreihe.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

#### Aufgabe 2:

Gegeben sei die  $4\pi$ -periodische direkte Fortsetzung der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2\pi \leq x \leq 0 \quad , \\ (x - \pi)^2 - \pi^2 & , \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad . \end{cases}$$

- Man zeichne die  $4\pi$ -periodische direkte Fortsetzung der Funktion im Intervall  $[-4\pi, 6\pi]$ .
- Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.
- Man zeichne die Partialsummen  $S_0(x), \dots, S_3(x)$  der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Aufgabe 3:**

Man berechne die Gradienten für folgende Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- a)  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ ,    b)  $f(x, y) = x^2 - 4y$ ,  
c)  $f(x, y) = x^2 - 4y^2$ ,    d)  $f(x, y) = x - 4y$

und zeichne ein Bild im Bereich  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ , auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion  $f$  angezeigt werden. Dies sind Linien, der Form  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$  für  $c \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$ .

- a) Man berechne von  $f$  alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.  
b) Man visualisiere den Graph von  $f$  über dem Parametergebiet  $[-3, 3] \times [-4, 4]$ .  
c) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$  wird beschrieben durch

$$z = z(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene  $f$  im Punkt  $(x_0, y_0) = (3, -4)$ .

- d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von  $f$  an, die durch den Punkt  $(3, -4)$  läuft.  
e) Man berechne den Winkel  $\alpha$  zwischen  $\text{grad } f(3, -4)$  und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von  $f$  im Punkt  $(3, -4)$ .

**Abgabetermin:** 21.10. - 25.10.2019 (zu Beginn der Übung)