Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 8

Kurvenintegrale 2. Art:

Gegeben sei eine vektorwertige und stetige Funktion

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n)^T & \mapsto & \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

und eine stückweise C^1-Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$, $t \mapsto \mathbf{c}(t)$.

Definition:

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} := \int_a^b \langle f(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle \; dt$$

heißt **Kurvenintegral 2. Art**. Ist die Kurve **geschlossen**, d.h. gilt $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, so schreibt man auch $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

Aufgabe 29:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positive durchlaufene Randkurve ∂H der Halbkreisfläche $H : \; x^2 + y^2 \leq 4$ mit $x \leq y$.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x+y)/z \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve $\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \to \mathbb{R}^3$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = ... = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

b) $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = ... = 1344\pi^3$

Siehe Blatt 8.

Potentialberechnung:

Ein Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt ein **Potential** bzw. eine **Stammfunktion**, falls es eine C^1-Funktion $\Phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\boldsymbol{f}$ mit dem **Gradientenfeld** von Φ übereinstimmt:

$$\text{grad } \Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) .$$

Integrabilitätsbedingung:

Ein C^1-Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ besitzt in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ genau dann ein Potential, wenn die folgende Integrabilitätsbedingung für alle $\boldsymbol{x} \in D$ erfüllt ist:

$$\boldsymbol{J f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{J f}(\boldsymbol{x}))^T \ .$$

Für $n = 2, 3$ stimmt diese Bedingung mit rot $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ überein.

Hauptsatz für Kurvenintegrale:

Für ein stetiges Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ mit Potential Φ gilt:

a)
$$\int\limits_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \Phi(\mathbf{c}(b)) - \Phi(\mathbf{c}(a))$$

für eine beliebige stückweise C^1-Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$.

b) Ein zu $\boldsymbol{f}$ gehöriges Potential Φ kann berechnet werden durch

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbf{c}_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + Konstante \ .$$

Dabei ist $\mathbf{c}_{\boldsymbol{x}}$ eine beliegige stückweise C^1-Kurve in D, die einen festen Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ mit $\boldsymbol{x} \in D$ verbindet.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung eines Potentials (neben b)) besteht im sukzessiven **'Integrieren'** der Komponenten des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^T \ ,$$

unter Verwendung der Bedingung grad $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, also im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} \Phi_x(x, y, z) \\ \Phi_y(x, y, z) \\ \Phi_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} \ .$$

Aufgabe 30:

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\boldsymbol{f}$ und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

Lösung:

a) $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}(x, y, z) = ... = \mathbf{0}$

b) Potential: $v(x, y, z) = ... = x^3y^4z^5 + x + y^2 + z^3 + K$

c)

d) $T = \pi$: $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = ... = -4$

$T = 2\pi$: $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = ... = 0$

Siehe Blatt 8.

Integralsatz von Green:

Gegeben sei ein C^1-Vektorfeld $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^2$ auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und eine kompakte Menge $D \subset G$, die bzgl. beider Koordinatenrichtungen als Normalbereich darstellbar sei. Dann gilt:

$$\int\limits_D \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \oint\limits_{\partial D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Dabei muss der Rand ∂D, in der für die Berechnung gewählten Parametrisierung, in mathematisch positiver Richtung, also entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Aufgabe 31:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E.

Lösung:

Integralsatz von Green: $\displaystyle\oint\limits_{\partial E} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = ... = 8\pi = ... = \int\limits_E \operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$

Siehe Blatt 8.