Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$:

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ wird als **Normalbereich** bezeichnet, falls

a) stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ existieren, so dass D die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{\, (x, y) \mid a \leq x \leq b \,,\; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \,\}$$

b) stetige Funktionen $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ existieren, so dass D die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{\, (x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \,,\; c \leq y \leq d \,\} \;.$$

Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$:

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ wird als **Normalbereich** bezeichnet,
falls stetige Funktionen φ_1, φ_2 und ξ_1, ξ_2 existieren,
so dass D die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ \, (x, y, z) \mid a \leq x \leq b \, , \; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \, , \; \xi_1(x, y) \leq z \leq \xi_2(x, y) \, \} \, .$$

Wie in der Darstellung im $\mathbb{R}^2$ können in der Darstellung
x, y und z beliebig vertauscht sein.

Bemerkung:
Häufig lassen sich Mengen D,
über die beispielsweise integriert werden soll,
nicht durch einen einzigen Normalbereich darstellen,
sondern nur durch Vereinigung mehrerer Normalbereiche.

Aufgabe 25:

a) Man zeichne das Dreieck D mit den Eckpunkten
$P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (0, 0)$ und $P_3 = (2, 2)$
und stelle es als Normalbereich dar.

Die Geraden durch folgende Punkte lauten:

P_1, P_3: $g(x) = (x + 4)/3$,
P_1, P_2: $f_1(x) = -x$,
P_2, P_3: $f_2(x) = x$.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 2\,,\ |x| \le y \le (x + 4)/3 \right\}$$

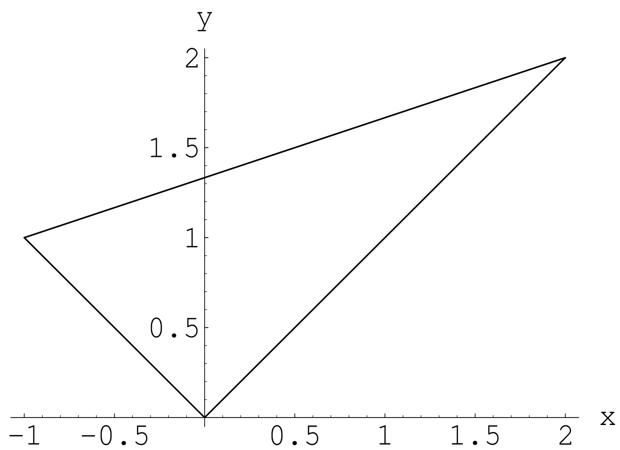

Bild 25 Dreieck D

b) Man berechne $\int_D 18y \, d(x,y)$

$$\int_D 18y \, d(x,y) = \int_{-1}^{2} \int_{|x|}^{(x+4)/3} 18y \, dy \, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 9y^2 \Big|_{|x|}^{(x+4)/3} \, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+4)^2 - 9x^2 \, dx$$

$$= \frac{(x+4)^3}{3} - 3x^3 \Bigg|_{-1}^{2} = 36$$

Koordinatentransformationen:

a) **Polarkoordinaten:** $0 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \det(\boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi) = r)$$

b) **Zylinderkoordinaten:**

$0 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad a \le z \le b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \det(\boldsymbol{J\Phi}(r,\varphi,z)) = r)$$

c) **Kugelkoordinaten:**

$$0 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad \big(\Rightarrow \det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta)) = r^2\cos\theta\big)$$

Transformationssatz:

Für stetige Funktionen $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_D f(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{u})) \cdot |\det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{u})|\,d\boldsymbol{u}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar, $K = \mathbf{\Phi}(D)$ und der

C^1-Koordinatentransformation $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^n$.

Die Transformation $\mathbf{\Phi}$ muss dabei auf D^0 invertierbar sein.

Aufgabe 26:

a) Man zeichne den durch $x \leq 0$, $z \geq 1$, $z \leq 3$ und $x^2 + y^2 = 4$ eingeschlossenen Bereich Z und stelle ihn als Normalbereich dar.

Kreis : $\quad x^2 + y^2 = 4$

Zylinder: $\quad x^2 + y^2 = 4\,, \quad 1 \leq z \leq 3$

halber Zylinder: $\quad x^2 + y^2 = 4\,, \quad 1 \leq z \leq 3\,, \quad x \leq 0$

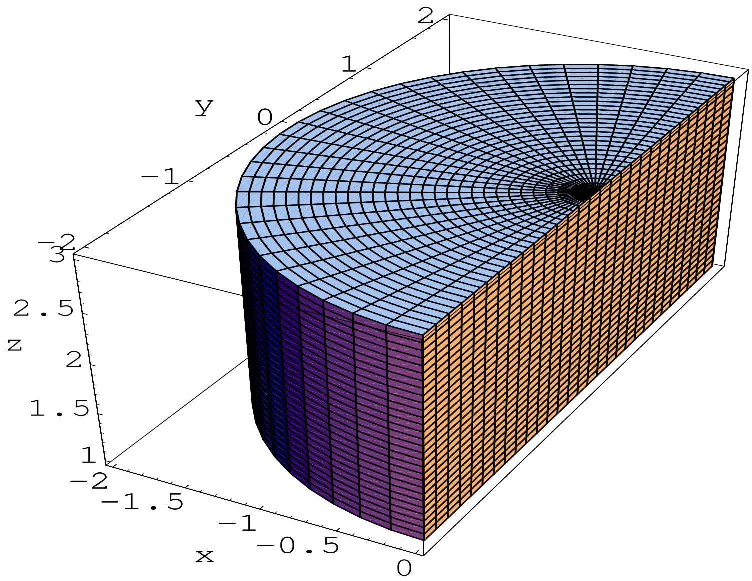

Bild 26 halber Zylinder Z

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2 \leq x \leq 0\,,\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\,,\ 1 \leq z \leq 3 \right\}$$

b) Man berechne

$$\begin{aligned}
\int_Z 3x\, d(x,y,z) &= \int\limits_{-2}^{0} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_{1}^{3} 3x\, dz\, dy\, dx \\
&= \int\limits_{1}^{3} dz \int\limits_{-2}^{0} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 3x\, dy\, dx \\
&= 2 \int\limits_{-2}^{0} 3xy|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\, dx \\
&= 2 \int\limits_{-2}^{0} 6x\sqrt{4-x^2}\, dx \\
&= -4\,(4-x^2)^{3/2}\Big|_{-2}^{0} = -32
\end{aligned}$$

Masse und Schwerpunkt

Gegeben sei ein Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit der

nichtnegativen stetigen Massendichtefunktion $\rho : K \to \mathbb{R}$.

Die **Masse** M des Körpers K berechnet sich durch

$$M = \int_K \rho(x, y, z)\, d(x, y, z)\ .$$

Der **Schwerpunkt** $\boldsymbol{x}_s$ des Körpers K ist gegeben durch

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \displaystyle\int_K \rho(x, y, z) \cdot x\, d(x, y, z) \\ \displaystyle\int_K \rho(x, y, z) \cdot y\, d(x, y, z) \\ \displaystyle\int_K \rho(x, y, z) \cdot z\, d(x, y, z) \end{pmatrix}\ .$$

Aufgabe 27:

Man zeichne die durch

$$y \leq 0\,, \quad z \leq 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$$

gegebene Viertelkugel K

und berechne ihren Schwerpunkt

mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$

unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

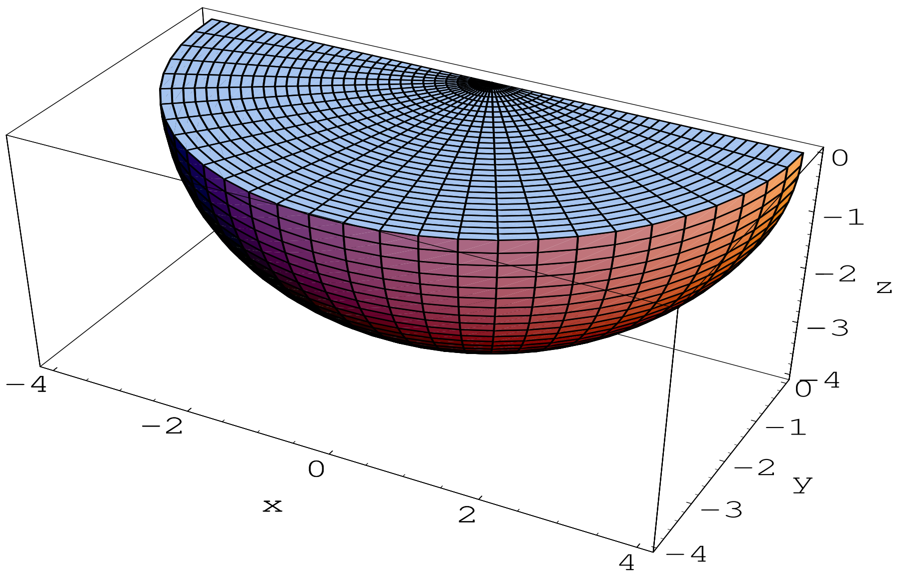

Bild 27 Viertelkugel K

Kugelkoordinaten für K:

$$0 \le r \le 4\,,\ \pi \le \varphi \le 2\pi\ ,\ -\pi/2 \le \theta \le 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta)\,,$$

$$\det \boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta) = r^2\cos(\theta)$$

Berechnung der Masse M in Kugelkoordinaten

unter Verwendung des Transformationssatzes

mit $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$:

$$\begin{aligned} M &= \int\limits_K x^2 + y^2 + z^2 + 1\ d(x,y,z) \\ &= \int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^0 (r^2+1)r^2\cos(\theta)\ d\theta\ d\varphi\ dr \\ &= \int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} r^4 + r^2\ d\varphi\ dr = \int\limits_0^4 \pi(r^4+r^2)\ dr \\ &= \left.\frac{(3\cdot r^5 + 5\cdot r^3)\pi}{15}\right|_0^4 = \frac{3392\pi}{15} \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten (x_s, y_s, z_s):

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{M}\int\limits_K (x^2+y^2+z^2+1)x\; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\cos(\varphi)\cos(\theta) r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\cos(\varphi)\left.\frac{\theta+\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} d\varphi\; dr \\
&= \frac{\pi}{4M}\int\limits_0^4 (r^5+r^3)\left.\sin(\varphi)\right|_\pi^{2\pi}\; dr = 0
\end{aligned}$$

Dies Ergebnis ergibt sich auch auf Grund der Symmetrie.

$$
\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{M}\int\limits_K (x^2+y^2+z^2+1)y\; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4\int\limits_\pi^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\sin(\varphi)\cos(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4\int\limits_\pi^{2\pi}(r^5+r^3)\sin(\varphi)\left.\frac{\theta+\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0}\; d\varphi\; dr \\
&= -\frac{\pi}{4M}\int\limits_0^4 (r^5+r^3)\cos(\varphi)\big|_\pi^{2\pi}\; dr \\
&= -\frac{\pi(2\cdot r^6+3\cdot r^4)\big|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{M}\int\limits_K (x^2+y^2+z^2+1)z\; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\sin(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\left.\frac{\sin^2(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} d\varphi\; dr \\
&= -\frac{1}{2M}\int\limits_0^4 (r^5+r^3)\left.\varphi\right|_\pi^{2\pi}\; dr \\
&= -\frac{\pi(2\cdot r^6+3\cdot r^4)\big|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
\end{aligned}
$$

Das **Trägheitsmoment** Θ_A eines Körpers K
bezüglich einer Drehachse A berechnet sich durch

$$\Theta_A = \int_K \rho(x,y,z) r^2(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

Dabei gibt $r(x,y,z)$ den Abstand
des Punktes $(x,y,z)^T \in K$ zu A an.

Steinerscher Satz:

Ist S eine zu A parallele Achse,
die durch den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}_s$ des Körpers K verläuft,
d der Abstand der Achse A von $\boldsymbol{x}_s$
und M die Masse von K,
so gilt bei konstanter Dichte ρ

$$\Theta_A = Md^2 + \Theta_S.$$

Aufgabe 28:

Durch

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

wird eine Kugel K beschrieben.

K habe die konstante Dichte ρ.

a) Man zeichne K unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3'.

Der MATLAB-Plotbefehl lautet

```
ezgraph3('surf','3*cos(s)*cos(t)',
'3*sin(s)*cos(t)','3*sin(t)',
[0,2*pi,-pi/2,pi/2])
```

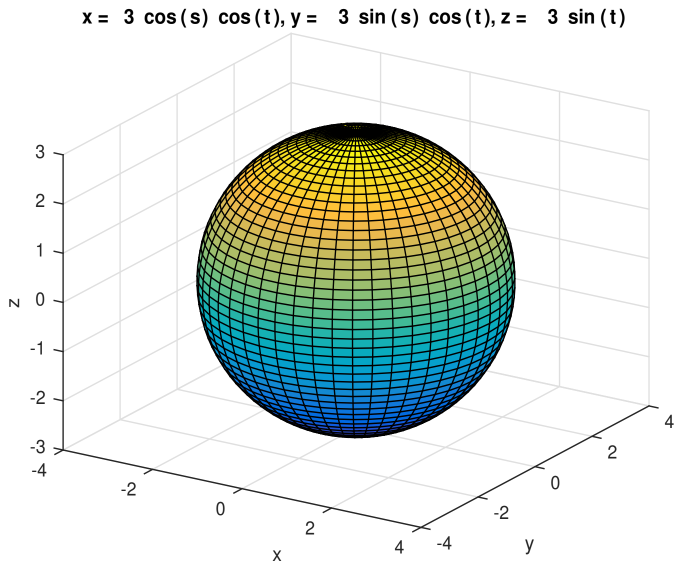

Bild 28) Kugel K mit Radius $R = 3$

b) Berechnung der Masse M in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte ρ:

$$
\begin{aligned}
M &= \int\limits_K \rho \, d(x,y,z) = \rho \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\
&= \rho \int\limits_0^3 r^2 \, dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta \\
&= \rho \left(\frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_0^3 (\varphi)|_0^{2\pi} \, (\sin(\theta))|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \rho \frac{3^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \rho \frac{4\pi 3^3}{3} = 36\pi\rho
\end{aligned}
$$

Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse berechnen:

Additionstheorem: $\cos^3(\theta) = (3\cos(\theta) + \cos(3\theta))/4$

$$\Theta_{z\text{-Achse}} = \int_K \rho(x^2+y^2)\,d(x,y,z)$$

$$= \rho \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2\cos^2(\varphi)\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)) \; r^2\cos(\theta)\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

$$= \rho \int_0^3 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta$$

$$= \rho \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 (\varphi)|_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(3\sin(\theta) + \frac{1}{3}\sin(3\theta)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \rho\frac{3^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{648\pi\rho}{5}$$

c) Man berechne das Trägheitsmoment von K
bezüglich der zur z-Achse parallelen Achse D,
die durch den Punkt $(2,1,3)^T$ verläuft.

Da der Schwerpunkt von P aus Symmetriegründen
im Ursprung liegt,
gilt nach dem Steinerschen Satz

$$\Theta_D = Md^2 + \Theta_{z\text{-Achse}} = 36\pi\rho(2^2+1^2) + \frac{648\pi\rho}{5} = \frac{1548\pi\rho}{5}\,.$$