**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

# Analysis III
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

**Normalbereiche im $\mathbb{R}^2$:**

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ wird als **Normalbereich** bezeichnet, falls

a) stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ existieren, so dass $D$ die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ \ (x, y) \mid a \leq x \leq b \ , \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \ \}$$

b) stetige Funktionen $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ existieren, so dass $D$ die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ \ (x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \ , \ c \leq y \leq d \ \} \ .$$

**Normalbereiche im $\mathbb{R}^3$:**

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ wird als **Normalbereich** bezeichnet, falls stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2$ und $\xi_1, \xi_2$ existieren, so dass $D$ die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ \ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b \ , \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \ , \ \xi_1(x, y) \leq z \leq \xi_2(x, y) \ \} \ .$$

Wie in der Darstellung im $\mathbb{R}^2$ können in der Darstellung $x, y$ und $z$ beliebig vertauscht sein.

*Bemerkung:*

Häufig lassen sich Mengen $D$, über die beispielsweise integriert werden soll, nicht durch einen einzigen Normalbereich darstellen, sondern nur durch Vereinigung mehrerer Normalbereiche.

**Aufgabe 25:**

a) Man zeichne das Dreieck $D$ mit den Eckpunkten $P_1 = (-1,1)$ , $P_2 = (0,0)$ und $P_3 = (2,2)$ und stelle es als Normalbereich dar.

b) Man berechne $\displaystyle\int_D 18y\, d(x,y)$

**Lösung:**

a) Die Geraden durch folgende Punkte lauten:

$P_1, P_3$: $g(x) = (x+4)/3$ , $P_1, P_2$: $f_1(x) = -x$ , $P_2, P_3$: $f_2(x) = x$.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 2\,,\ |x| \le y \le (x+4)/3 \right\}$$

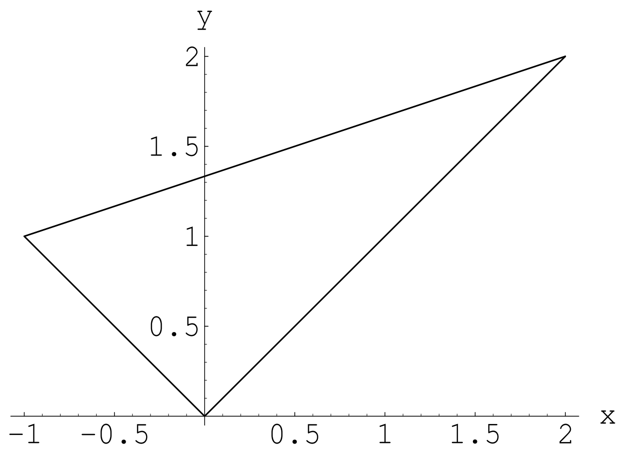


**Bild 25** Dreieck $D$

b)
$$\int\limits_D 18y\, d(x,y) = \int\limits_{-1}^{2} \int\limits_{|x|}^{(x+4)/3} 18y\, dy\, dx = \int\limits_{-1}^{2} 9y^2 \Big|_{|x|}^{(x+4)/3} dx$$
$$= \int\limits_{-1}^{2} (x+4)^2 - 9x^2\, dx = \frac{(x+4)^3}{3} - 3x^3 \Big|_{-1}^{2} = 36$$

**Koordinatentransformationen:**

a) **Polarkoordinaten:** $0 \le r \le R\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r,\varphi) = r)$$

b) **Zylinderkoordinaten:**

$0 \le r \le R\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\quad a \le z \le b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r,\varphi,z)) = r)$$

c) **Kugelkoordinaten:**

$0 \le r \le R\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad \big(\Rightarrow \det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta)) = r^2\cos\theta\big)$$

**Transformationssatz:**

Für stetige Funktionen $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_K f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_D f(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{u}))\cdot|\det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{u})|\,d\boldsymbol{u}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar, $K = \mathbf{\Phi}(D)$ und der $C^1$-Koordinatentransformation $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbb{R}^n$. Die Transformation $\mathbf{\Phi}$ muss dabei auf $D^0$ invertierbar sein.

**Aufgabe 26:**

a) Man zeichne den durch $x \leq 0,\ z \geq 1,\ z \leq 3$ und $x^2 + y^2 = 4$ eingeschlossenen Bereich $Z$ und stelle ihn als Normalbereich dar.

b) Man berechne $\displaystyle\int_Z 3x\, d(x,y,z)$ in $x, y, z$-Koordinaten und in Zylinderkoordinaten.

**Lösung:**

a) $x \leq 0,\ z \geq 1,\ z \leq 3$ und $x^2 + y^2 = 4$ beschreibt einen halben Zylinder

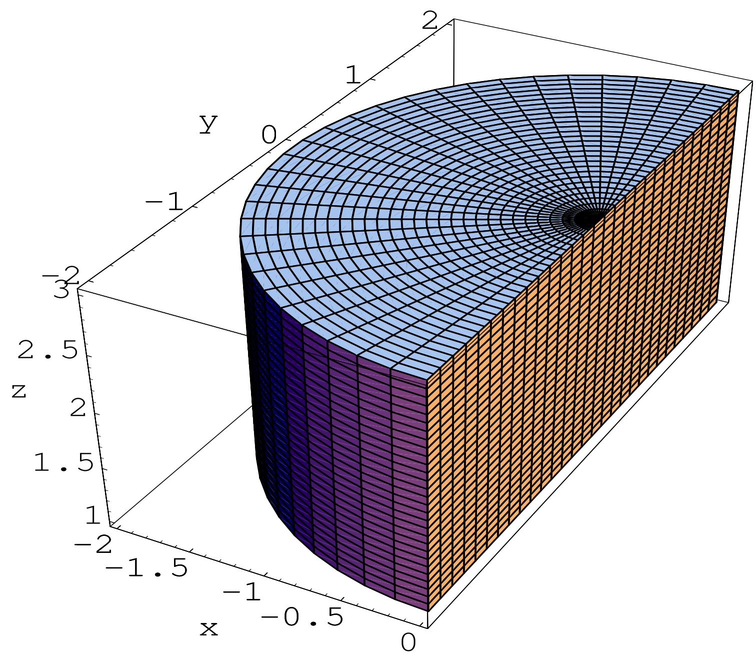


**Bild 26** halber Zylinder $Z$

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2 \leq x \leq 0\,,\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\,,\ 1 \leq z \leq 3 \right\}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_Z 3x \, d(x,y,z) &= \int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{3} 3x \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{1}^{3} dz \int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 3x \, dy \, dx \\
&= 2 \int_{-2}^{0} 3xy\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \;=\; 2 \int_{-2}^{0} 6x\sqrt{4-x^2} \, dx \\
&= -4 \, (4-x^2)^{3/2}\Big|_{-2}^{0} = -32
\end{aligned}$$

oder alternativ mit Transformation auf Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_Z 3x \, d(x,y,z) &= \int_{1}^{3} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{0}^{2} 3r\cos(\varphi) r \, dr \, d\varphi \, dz \\
&= \int_{0}^{2} 3r^2 \, dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\varphi) \, d\varphi \int_{1}^{3} dz \\
&= \left( r^3\Big|_0^2 \right) \left( \sin(\varphi)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) \left( z\Big|_1^3 \right) \\
&= 8 \cdot (-2) \cdot 2 = -32
\end{aligned}$$

**Masse und Schwerpunkt eines Körpers $K$:**

Gegeben sei ein Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit der nichtnegativen stetigen Massendichtefunktion $\rho : K \to \mathbb{R}$.

Die **Masse** $M$ des Körpers $K$ berechnet sich durch

$$M = \int_K \rho(x, y, z)\, d(x, y, z)\,.$$

Der **Schwerpunkt** $\boldsymbol{x}_s$ des Körpers $K$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} \displaystyle\int_K \rho(x, y, z) \cdot x\, d(x, y, z) \\ \displaystyle\int_K \rho(x, y, z) \cdot y\, d(x, y, z) \\ \displaystyle\int_K \rho(x, y, z) \cdot z\, d(x, y, z) \end{pmatrix}\,.$$

**Aufgabe 27:**

Man zeichne die durch $y \leq 0$, $z \leq 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ gegebene Viertelkugel $K$ und berechne ihren Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

**Lösung:**

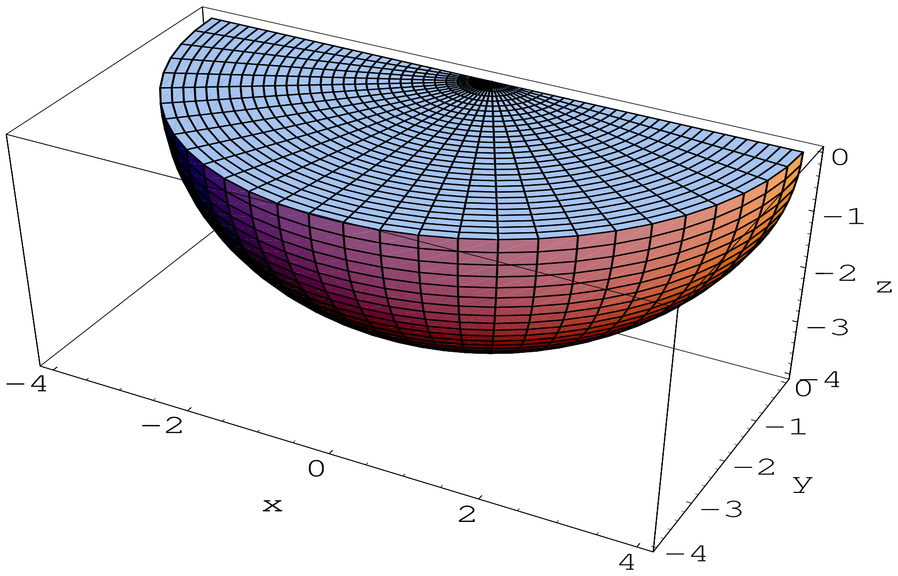


**Bild 27** Viertelkugel $K$

Kugelkoordinaten für $K$: $0 \leq r \leq 4$ , $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ , $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi, \theta) \,, \quad \det \boldsymbol{J\Phi}(r, \varphi, \theta) = r^2\cos(\theta)$$

Berechnung der Masse $M$ in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ :

$$\begin{aligned} M &= \int_K x^2 + y^2 + z^2 + 1 \, d(x, y, z) = \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} \int_{-\pi/2}^0 (r^2 + 1) r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^4 \int_\pi^{2\pi} r^4 + r^2 \, d\varphi \, dr = \int_0^4 \pi(r^4 + r^2) \, dr = \left. \frac{(3 \cdot r^5 + 5 \cdot r^3)\pi}{15} \right|_0^4 = \frac{3392\pi}{15} \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten $(x_s, y_s, z_s)$:

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{M}\int\limits_K (x^2+y^2+z^2+1)x \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\cos(\varphi)\cos(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\cos(\varphi)\; \left.\frac{\theta+\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} d\varphi\; dr \\
&= \frac{\pi}{4M}\int\limits_0^4 (r^5+r^3)\; \sin(\varphi)|_\pi^{2\pi}\; dr = 0
\end{aligned}$$

Dies Ergebnis ergibt sich auch auf Grund der Symmetrie.

$$\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{M}\int\limits_K (x^2+y^2+z^2+1)y \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\sin(\varphi)\cos(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\sin(\varphi)\; \left.\frac{\theta+\sin(\theta)\cos(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} d\varphi\; dr \\
&= -\frac{\pi}{4M}\int\limits_0^4 (r^5+r^3)\; \cos(\varphi)|_\pi^{2\pi}\; dr = -\frac{\pi(2\cdot r^6+3\cdot r^4)|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{M}\int\limits_K (x^2+y^2+z^2+1)z \; d(x,y,z) \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{0} (r^2+1)r\sin(\theta)r^2\cos(\theta)\; d\theta\; d\varphi\; dr \\
&= \frac{1}{M}\int\limits_0^4 \int\limits_\pi^{2\pi} (r^5+r^3)\; \left.\frac{\sin^2(\theta)}{2}\right|_{-\pi/2}^{0} d\varphi\; dr \\
&= -\frac{1}{2M}\int\limits_0^4 (r^5+r^3)\; \varphi|_\pi^{2\pi}\; dr = -\frac{\pi(2\cdot r^6+3\cdot r^4)|_0^4}{24M} = -\frac{1120\pi}{3M} = -\frac{175}{106}
\end{aligned}$$

**Trägheitsmoment eines Körpers $K$:**

Das **Trägheitsmoment** $\Theta_A$ eines Körpers $K$ bezüglich einer Drehachse $A$ berechnet sich durch

$$\Theta_A = \int_K \rho(x,y,z) r^2(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$$

Dabei gibt $r(x,y,z)$ den Abstand des Punktes $(x,y,z)^T \in K$ zu $A$ an.

**Steinerscher Satz:**

Ist $S$ eine zu $A$ parallele Achse, die durch den Schwerpunkt $\boldsymbol{x}_s$ des Körpers $K$ verläuft, $d$ der Abstand der Achse $A$ von $\boldsymbol{x}_s$ und $M$ die Masse von $K$, so gilt bei konstanter Dichte $\rho$

$$\Theta_A = Md^2 + \Theta_S.$$

**Aufgabe 28:**

Durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ wird eine Kugel $K$ beschrieben. $K$ habe die konstante Dichte $\rho$.

a) Man zeichne $K$ unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3'.

b) Für $K$ berechne man die Masse und das Trägheitsmoment bezüglich der $z$-Achse.

c) Man berechne das Trägheitsmoment von $K$ bezüglich der zur $z$-Achse parallelen Achse $D$, die durch den Punkt $(2, 1, 3)^T$ verläuft.

**Lösung:**

a) Der MATLAB-Plotbefehl lautet

```
ezgraph3('surf','3*cos(s)*cos(t)','3*sin(s)*cos(t)','3*sin(t)',
[0,2*pi,-pi/2,pi/2])
```

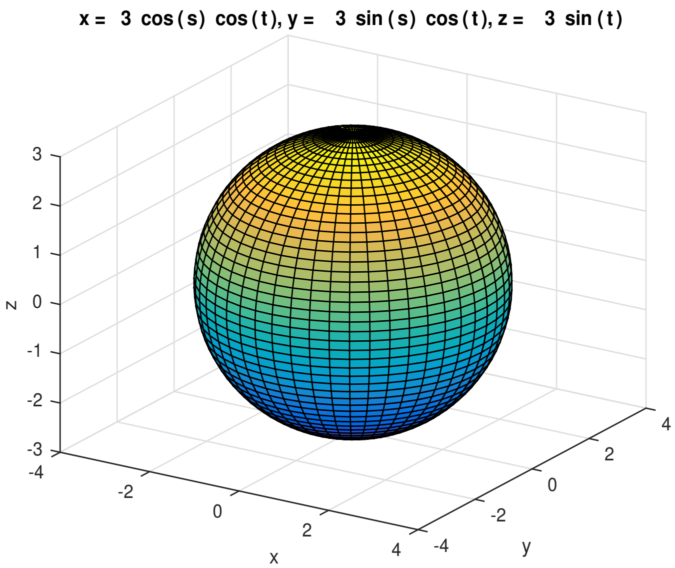


**Bild 28** Kugel $K$ mit Radius $R = 3$

b) Berechnung der Masse $M$ in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte $\rho$:

$$\begin{aligned} M &= \int\limits_K \rho \, d(x,y,z) = \rho \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \rho \int\limits_0^3 r^2 \, dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \rho \left( \frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_0^3 (\varphi)|_0^{2\pi} \, (\sin(\theta))|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \rho \frac{3^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 \; = \; \rho \frac{4\pi 3^3}{3} \; = \; 36\pi\rho \end{aligned}$$

Berechnung des Trägheitsmoments bezüglich der $z$-Achse in Kugelkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes mit konstanter Dichte $\rho$ und des Additionstheorems $\cos^3(\theta) = (3\cos(\theta) + \cos(3\theta))/4$

$$\begin{aligned} \Theta_{z\text{-Achse}} &= \int\limits_K \rho(x^2+y^2) \, d(x,y,z) \\ &= \rho \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2\cos^2(\varphi)\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)) \, r^2\cos(\theta) \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \rho \int\limits_0^3 r^4 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta \\ &= \rho \left( \frac{r^5}{5} \right) \Bigg|_0^3 (\varphi)|_0^{2\pi} \, \frac{1}{4} \left( 3\sin(\theta) + \frac{1}{3}\sin(3\theta) \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \rho \frac{3^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \; = \; \frac{648\pi\rho}{5} \end{aligned}$$

c) Da der Schwerpunkt von $P$ aus Symmetriegründen im Ursprung liegt, gilt nach dem Steinerschen Satz

$$\Theta_D = Md^2 + \Theta_{z\text{-Achse}} = 36\pi\rho(2^2+1^2) + \frac{648\pi\rho}{5} = \frac{1548\pi\rho}{5} \, .$$