Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Das Newton-Verfahren:

Aufgabenstellung:

Gesucht ist eine Nullstelle $\boldsymbol{x}^* \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, einer C^1-Funktion $\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^n$, es gilt also

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}\,.$$

Lösungsverfahren:

Da ein explizites Auflösen dieser im Allgemeinen nichtlinearen Gleichung nach $\boldsymbol{x}^*$ in der Regel nicht möglich ist, wird $\boldsymbol{x}^*$ schrittweise über eine (rekursive) Folge $\boldsymbol{x}^k$ angenähert.

Dazu wird $\boldsymbol{F}$ im Startpunkt $\boldsymbol{x}^0$ linearisiert (wie im Eindimensionalen), also näherungsweise dargestellt mit Hilfe der Jacobi-Matrix durch:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)\,.$$

Man setzt nun ersatzweise die Linearisierung gleich Null, d.h.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = \mathbf{0}\,.$$

Damit erhält man statt $\boldsymbol{x}^*$ die Ersatznullstelle $\tilde{\boldsymbol{x}}$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{JF}(\boldsymbol{x}^0)\underbrace{(\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^0)}_{=:\Delta\boldsymbol{x}^0} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0) \quad\Rightarrow\quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^0 + \Delta\boldsymbol{x}^0 \,.$$

Wendet man das Verfahren k-mal an und verwendet dabei jeweils immer das aktuelle $\tilde{\boldsymbol{x}}$ als nächsten Startpunkt $\boldsymbol{x}^k$,

so ergibt sich das **Newton-Verfahren:**

$$\boldsymbol{JF}(\boldsymbol{x}^k)\underbrace{(\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^k)}_{=:\Delta\boldsymbol{x}^k} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \Delta\boldsymbol{x}^k \,.$$

Für $n = 2$ lautet das Newton Verfahren mit

$\boldsymbol{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))^T \quad$ und $\quad \boldsymbol{x} = (x,y)^T$:

$$\begin{pmatrix} F_{1,x}(x^k,y^k) & F_{1,y}(x^k,y^k) \\ F_{2,x}(x^k,y^k) & F_{2,y}(x^k,y^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(x^k,y^k) \\ F_2(x^k,y^k) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k + \Delta x^k \\ y^k + \Delta y^k \end{pmatrix} \,.$$

Aufgabe 21:

Zur Bestimmung eines Extremums der Funktion

$$f(x,y) := (x+y)^2 + \cosh(x) + \cos(y+1)$$

soll das Newton-Verfahren auf die Funktion

$\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x,y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{JF}(x,y)$.

$$\nabla f(x,y) = \boldsymbol{F}(x,y) \; = \begin{pmatrix} 2(x+y) + \sinh(x) \\ 2(x+y) - \sin(y+1) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}f(x,y) = \boldsymbol{JF}(x,y) = \begin{pmatrix} 2+\cosh(x) & 2 \\ 2 & 2-\cos(y+1) \end{pmatrix}$$

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf:

$$\boldsymbol{JF}(\boldsymbol{x}^k)\Delta\boldsymbol{x}^k = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)$$

mit $\boldsymbol{x}^k = (x_k, y_k)^T$ und $\Delta\boldsymbol{x}^k = (x_{k+1}-x_k, y_{k+1}-y_k)^T$
sowie $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \Delta\boldsymbol{x}^k$ lautet hier:

$$\begin{pmatrix} 2+\cosh(x_k) & 2 \\ 2 & 2-\cos(y_k+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1}-x_k \\ y_{k+1}-y_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2(x_k+y_k)+\sinh(x_k) \\ 2(x_k+y_k)-\sin(y_k+1) \end{pmatrix}$$

c) Man schreibe ein MATLAB-Programm zur numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens unter Verwendung der MATLAB-Routine 'linsolve'.

```
function [x] = newtonverfahren(n)
%---------------------------------------------------------------
% Berechnet die Lösung des nichtlinearen
% Gleichungssystems
%
%    grad f(x)=0
%
% mit Hilfe des Newtonverfahrens.
%
% Input:            n   Anzahl der Iterationen
%
% Output:           x  Lösung
%
% Kai Rothe, Oktober-2007.
%---------------------------------------------------------------
%
%
%  Startwert
%
  format long
  x= [0 0]';
%
%
%
%
%
```

```
%  Newtoniteration
%
 for i=1:n
%
%  Berechnung der Newtondaten
%
  [A,b]=newtondaten(x);
%
%  Lösen des Gleichungssystems
%
  d= linsolve(A,b);
%
%  Berechnung der nächsten Iterierten
%
   x=x+d
 end
```

```
function [A,b] = newtondaten(x)
%-------------------------------------------------------
% Für das Newtonverfahren zur Lösung von
%
%          grad f = 0
%
% werden die Daten bereitgestellt.
%
% Input:   x = Wert für den die Newton Daten
%               berechnet werden.
%
%
```

```
% Output:  A = Hess f(x)
%          b =-grad f(x)
%
% Kai Rothe, Oktober-2007.
%
%
%-----------------------------------------------------------
% f= @(x,y) (x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)
-----------------------------------------------------------
%
  fx= @(x,y) (2*(x+y)+sinh(x));
  fy= @(x,y) (2*(x+y)-sin(y+1));
  fxx= @(x,y) (2+cosh(x));
  fyy= @(x,y) (2-cos(y+1));
  fxy= @(x,y) (2);
%
%  rechte Seite:
%
  b(1)=-fx(x(1),x(2));
  b(2)=-fy(x(1),x(2));
  b=b';
%
%  Newtonmatrix
%
  A(1,1)=fxx(x(1),x(2));
  A(1,2)=fxy(x(1),x(2));
  A(2,1)=fxy(x(1),x(2));
  A(2,2)=fyy(x(1),x(2));
%
 end
```

d) Ausgehend vom Startvektor

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

berechne man damit eine Lösung auf zehn Stellen genau.

Der MATLAB-Funktionsaufruf:

```
newtonverfahren(10)
```

k	x_k	y_k
0	0.000000000 00000	0.000000000 00000
1	−4.439389816 82513	6.659084725 23770
2	−3.449060735 74839	3.648025573 49758
3	−2.394655233 59035	1.950288881 70317
4	−1.489158729 03652	1.704755385 99186
5	−0.920832169 34858	1.310834722 92832
6	−0.763781704 52020	1.177842461 21565
7	−0.753841072 54155	1.167468313 38200
8	−0.753797371 39895	1.167416903 97919
9	−0.753797370 45256	1.167416902 81365
10	−0.753797370 45256	1.167416902 81365

e) Man klassifiziere den berechneten stationären Punkt und erstelle einen Flächenplot und einen Höhenlinienplot mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Die Hessematrix

$$\boldsymbol{H} f(-0.753797370, 1.167416902) = \begin{pmatrix} 3.297815268 & 2 \\ 2 & 2.561850095 \end{pmatrix}$$

ist im stationären Punkt positiv definit, da ihre Hauptunterdeterminanten positiv sind.

Der gefundene stationäre Punkt ist also ein Minimum.

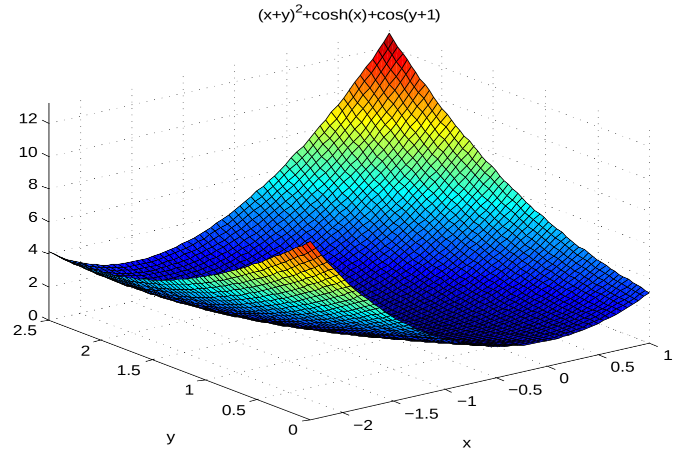

Bild 21 a)

```
ezsurf('(x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)',[-2.3 1.0 0. 2.5])
```

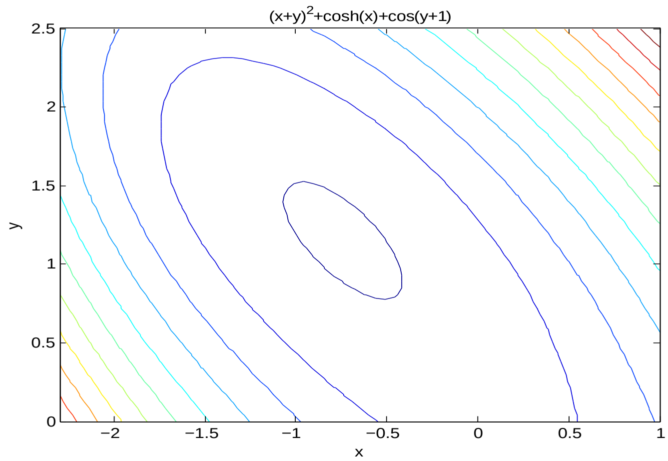

Bild 21 b)

```
ezcontour('(x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)',[-2.3 1.0 0. 2.5])
```

Das Riemann-Integral:

Exemplarische Darstellung für eine **beschränkte Funktion** auf einem **Rechteck**

$$\begin{aligned} f : \underbrace{[a,b]\times[c,d]}_{:=Q} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y)\,. \end{aligned}$$

Zerlegung Z des Rechtecks Q durch

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,,\quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

in **Teilrechtecke**

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

mit **Flächeninhalt** $\mathrm{Vol}(Q_{ij}) = (x_{i+1} - x_i)\cdot(y_{j+1} - y_j)$.

Riemannsche Untersumme:

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \inf_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y))\cdot \mathrm{Vol}(Q_{i,j})\right)$$

Riemannsche Obersumme:

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{m-1} \sup_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y))\cdot \mathrm{Vol}(Q_{i,j})\right)$$

Riemannsches Integral:

(definiert nur für $\sup\limits_Z U_f(Z) = \inf\limits_Z O_f(Z)$)

$$\int\limits_Q f(x,y)\,d(x,y) \;:=\; \sup_Z U_f(Z) \quad \left(= \inf_Z O_f(Z)\right) \;.$$

Satz: (von Fubini)

Existieren

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$$

für alle $x \in [a,b]$ und

$$G(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$$

für alle $y \in [c,d]$, dann gilt

$$\int\limits_Q f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Aufgabe 22:

Mit $Q := [0,2] \times [0,1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 2 - x$$

a) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]\ ,\ i,j = 1, \ldots, n$$

$$\begin{aligned}
U_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \inf_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \mathrm{Vol}\,(Q_{i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(2 - \frac{2i}{n}\right) \cdot \frac{2}{n^2} \right) \\
&= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right) \\
&= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (n - i) \\
&= \frac{4}{n^2} \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{2(n^2 - n)}{n^2} = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}\,(Q_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(2 - \frac{2(i-1)}{n} \right) \cdot \frac{2}{n^2} \right) \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

b) Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

$$\begin{aligned} \int_Q f(x,y)\, d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^2 2 - x\, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 2x - \frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 dy \\ &= \int_0^1 2\, dy \\ &= 2y\big|_0^1 = 2 \end{aligned}$$

Man erhält natürlich:

$$2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = U_f(Z) \le \int_Q f(x,y)d(x,y) = 2 \le O_f(Z) = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Aufgabe 23:

Man berechne folgende Integrale

a) $$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x+y)\big|_0^{\pi}\;dy$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \sin(\pi+y) - \sin y\;dy$$

$$= (\cos y - \cos(\pi+y)\big|_{\pi}^{2\pi} = 4$$

b) $$\int_{0}^{2}\int_{0}^{1} x^2 - 3y + 1\,dx\,dy = \int_{0}^{2} x^3/3 - 3yx + x\Big|_0^1\;dy$$

$$= \int_{0}^{2} 4/3 - 3y\;dy \;=\; 4y/3 - 3y^2/2\Big|_0^2$$

$$= 8/3 - 12/2 \;=\; -10/3$$

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{2} x^2 - 3y + 1\,dy\,dx = \int_{0}^{1} x^2y - 3y^2/2 + y\Big|_0^2\;dx$$

$$= \int_{0}^{1} 2x^2 - 4\,dx \;=\; 2x^3/3 - 4x\Big|_0^1$$

$$= 2/3 - 4 \;=\; -10/3$$

c) $Q = [1, e] \times [1, 2]$

$$\int_Q \frac{y^2 - x}{xy^2}\, d(x, y)$$

$$= \int_1^2 \int_1^e \frac{y^2 - x}{xy^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 \int_1^e \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 \ln|x| - \frac{x}{y^2}\Big|_1^e\, dy$$

$$= \int_1^2 1 - \frac{e-1}{y^2}\, dy$$

$$= y + \frac{e-1}{y}\Big|_1^2$$

$$= 1 + (e-1)\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{3-e}{2}$$

Aufgabe 24:

Man berechne folgende Integrale

a) $$\int_2^9 \int_0^3 \int_0^1 \frac{x^6\sqrt{y+1}}{z-1}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_2^9 \int_0^3 \int_0^1 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1} \cdot x^6\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_2^9 \int_0^3 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1} \left(\int_0^1 x^6\, dx \right) dy\, dz$$

$$= \left(\int_0^1 x^6\, dx \right) \cdot \left(\int_2^9 \int_0^3 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1}\, dy\, dz \right)$$

$$= \left(\int_0^1 x^6\, dx \right) \cdot \left(\int_2^9 \frac{1}{z-1} \left(\int_0^3 \sqrt{y+1}\, dy \right) dz \right)$$

$$= \left(\int_0^1 x^6\, dx \right) \cdot \left(\int_0^3 \sqrt{y+1}\, dy \right) \cdot \left(\int_2^9 \frac{1}{z-1}\, dz \right)$$

$$= \left(\left. \frac{x^7}{7} \right|_0^1 \right) \cdot \left(\left. \frac{2}{3}(y+1)^{3/2} \right|_0^3 \right) \cdot \left(\ln|z-1| \big|_2^9 \right)$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \cdot \ln(8) = \ln(4)$$

b) $Q = [1,2] \times [0,1] \times [-1,1]$.

$$\int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\, d(x,y,z)$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \left(\cosh z + \frac{2z^3}{(2x+y)^2} \right) \Bigg|_{-1}^1 \, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \frac{4}{(2x+y)^2}\, dy\, dx = \int_1^2 \left. -\frac{4}{2x+y} \right|_0^1 dx$$

$$= \int_1^2 -\frac{4}{2x+1} + \frac{2}{x}\, dx = \left(-2\ln|2x+1| + 2\ln|x|\right)\Big|_1^2$$

$$= -2\ln 5 + 2\ln 2 + 2\ln 3 = \ln\frac{36}{25}$$