Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Das Newton-Verfahren:

Aufgabenstellung:

Gesucht ist eine Nullstelle $\boldsymbol{x}^* \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, einer C^1-Funktion $\boldsymbol{F}: D \to \mathbb{R}^n$, es gilt dann

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} .$$

Lösungsverfahren:

Da ein explizites Auflösen dieser im Allgemeinen nichtlinearen Gleichung nach $\boldsymbol{x}^*$ in der Regel nicht möglich ist, wird $\boldsymbol{x}^*$ schrittweise über eine (rekursive) Folge $\boldsymbol{x}^k$ angenähert.

Dazu wird $\boldsymbol{F}$ im Startpunkt $\boldsymbol{x}^0$ linearisiert (wie im Eindimensionalen), also näherungsweise dargestellt mit Hilfe der Jacobi-Matrix durch:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{JF}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) .$$

Man setzt nun ersatzweise die Linearisierung gleich Null und erhält statt $\boldsymbol{x}^*$ die Ersatznullstelle $\tilde{\boldsymbol{x}}$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{JF}(\boldsymbol{x}^0)\underbrace{(\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^0)}_{=:\Delta\boldsymbol{x}^0} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^0) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^0 + \Delta\boldsymbol{x}^0 .$$

Wendet man das Verfahren k-mal an und verwendet dabei jeweils immer das aktuelle $\tilde{\boldsymbol{x}}$ als nächsten Startpunkt $\boldsymbol{x}^k$, so ergibt sich das **Newton-Verfahren:**

$$\boldsymbol{JF}(\boldsymbol{x}^k)\underbrace{(\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k)}_{=:\Delta\boldsymbol{x}^k} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \Delta\boldsymbol{x}^k .$$

Für $n = 2$ mit $\boldsymbol{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))^T$ und $\boldsymbol{x} = (x,y)^T$ lautet das Newton Verfahren:

$$\begin{pmatrix} F_{1,x}(x^k,y^k) & F_{1,y}(x^k,y^k) \\ F_{2,x}(x^k,y^k) & F_{2,y}(x^k,y^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta y^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(x^k,y^k) \\ F_2(x^k,y^k) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k + \Delta x^k \\ y^k + \Delta y^k \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 21:

Zur Bestimmung eines Extremums der Funktion

$$f(x,y) := (x+y)^2 + \cosh(x) + \cos(y+1)$$

soll das Newton-Verfahren auf die Funktion $\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x,y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{JF}(x,y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf.

c) Man schreibe ein MATLAB-Programm zur numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens unter Verwendung der MATLAB-Routine 'linsolve'.

d) Ausgehend vom Startvektor $(x_0, y_0) = (0,0)$ berechne man damit eine Lösung auf zehn Stellen genau.

e) Man klassifiziere den berechneten stationären Punkt und erstelle einen Flächenplot und einen Höhenlinienplot mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Lösung:

a) $$\nabla f(x,y) = \boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+y) + \sinh(x) \\ 2(x+y) - \sin(y+1) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}f(x,y) = \boldsymbol{JF}(x,y) = \begin{pmatrix} 2+\cosh(x) & 2 \\ 2 & 2-\cos(y+1) \end{pmatrix}$$

b) Das Newton-Verfahren

$$\boldsymbol{JF}(\boldsymbol{x}^k)\Delta\boldsymbol{x}^k = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k)$$

mit $\boldsymbol{x}^k = (x_k, y_k)^T$ und $\Delta\boldsymbol{x}^k = (x_{k+1}-x_k, y_{k+1}-y_k)^T$ sowie $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \Delta\boldsymbol{x}^k$ lautet hier:

$$\begin{pmatrix} 2+\cosh(x_k) & 2 \\ 2 & 2-\cos(y_k+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1}-x_k \\ y_{k+1}-y_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2(x_k+y_k)+\sinh(x_k) \\ 2(x_k+y_k)-\sin(y_k+1) \end{pmatrix}.$$

c)
```
function [x] = newtonverfahren(n)
%-------------------------------------------------------------
% Berechnet die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems
%
%    grad f(x)=0
%
% mit Hilfe des Newtonverfahrens.
%
% Input:            n   Anzahl der Iterationen
%
% Output:           x  Lösung
%
% Kai Rothe, Oktober-2007.
%-------------------------------------------------------------
%
%  Startwert
%
  format long
  x= [0 0]';
%
%  Newtoniteration
%
 for i=1:n
%
%  Berechnung der Newtondaten
%
  [A,b]=newtondaten(x);
%
%  Lösen des Gleichungssystems
%
  d= linsolve(A,b);
%
%  Berechnung der nächsten Iterierten
%
   x=x+d
 end
```

```
function [A,b] = newtondaten(x)
%------------------------------------------------------------
% Für das Newtonverfahren zur Lösung von
%
%         grad f = 0
%
% werden die Daten bereitgestellt.
%
% Input:   x = Wert für den die Newton Daten berechnet werden.
%
% Output:  A = Hess f(x)
%          b =-grad f(x)
%
% Kai Rothe, Oktober-2007.
%------------------------------------------------------------
% f= @(x,y) (x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)
%------------------------------------------------------------
%
  fx= @(x,y) (2*(x+y)+sinh(x));
  fy= @(x,y) (2*(x+y)-sin(y+1));
  fxx= @(x,y) (2+cosh(x));
  fyy= @(x,y) (2-cos(y+1));
  fxy= @(x,y) (2);
%
%  rechte Seite:
%
  b(1)=-fx(x(1),x(2));
  b(2)=-fy(x(1),x(2));
  b=b';
%
%  Newtonmatrix
%
  A(1,1)=fxx(x(1),x(2));
  A(1,2)=fxy(x(1),x(2));
  A(2,1)=fxy(x(1),x(2));
  A(2,2)=fyy(x(1),x(2));
%
 end
```

d) Der MATLAB-Funktionsaufruf:

```
newtonverfahren(10)
```

k	x_k	y_k
0	$0.000000000\,00000$	$0.000000000\,00000$
1	$-4.439389816\,82513$	$6.659084725\,23770$
2	$-3.449060735\,74839$	$3.648025573\,49758$
3	$-2.394655233\,59035$	$1.950288881\,70317$
4	$-1.489158729\,03652$	$1.704755385\,99186$
5	$-0.920832169\,34858$	$1.310834722\,92832$
6	$-0.763781704\,52020$	$1.177842461\,21565$
7	$-0.753841072\,54155$	$1.167468313\,38200$
8	$-0.753797371\,39895$	$1.167416903\,97919$
9	$-0.753797370\,45256$	$1.167416902\,81365$
10	$-0.753797370\,45256$	$1.167416902\,81365$

e) Die Hessematrix

$$\boldsymbol{H}f(-0.753797370, 1.167416902) = \begin{pmatrix} 3.297815268 & 2 \\ 2 & 2.561850095 \end{pmatrix}$$

ist im stationären Punkt positiv definit, da ihre Hauptunterdeterminanten positiv sind. Der gefundene stationäre Punkt ist also ein Minimum.

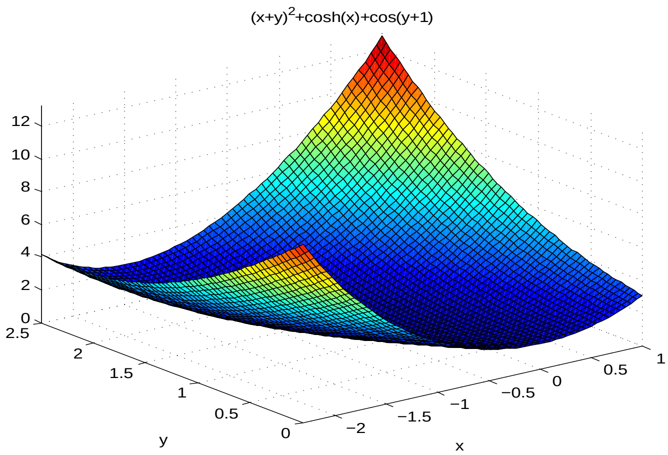

Bild 21 a)

```
ezsurf('(x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)',[-2.3 1.0 0. 2.5])
```

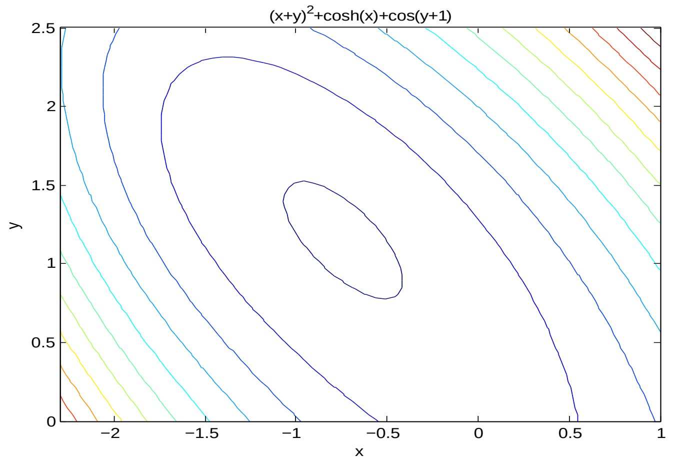

Bild 21 b)

```
ezcontour('(x+y)^2+cosh(x)+cos(y+1)',[-2.3 1.0 0. 2.5])
```

Das Riemann-Integral:

Exemplarische Darstellung für eine **beschränkte Funktion** auf einem **Rechteck**

$$\begin{aligned} f : \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{:=Q} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y)\,. \end{aligned}$$

Zerlegung Z des Rechtecks Q durch

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

in **Teilrechtecke** $Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ mit **Flächeninhalt** $\mathrm{Vol}(Q_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$.

Riemannsche Untersumme:

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \inf_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \mathrm{Vol}(Q_{i,j}) \right)$$

Riemannsche Obersumme:

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sup_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \mathrm{Vol}(Q_{i,j}) \right)$$

Riemannsches Integral: (definiert nur für $\sup\limits_Z U_f(Z) = \inf\limits_Z O_f(Z)$)

$$\int\limits_Q f(x,y)\, d(x,y) := \sup_Z U_f(Z) \quad \left(= \inf_Z O_f(Z) \right)\,.$$

Satz: **(von Fubini)**

Existieren $F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$ für alle $x \in [a,b]$ und $G(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$ für alle $y \in [c,d]$, dann gilt

$$\int\limits_Q f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Aufgabe 22:

Mit $Q := [0,2] \times [0,1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 2 - x$$

a) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]\ , \ i,j = 1,\ldots,n$$

b) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} U_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \inf_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \mathrm{Vol}\,(Q_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(2-\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right) \\ &= \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{4}{n^2}\left(n^2-\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{2(n^2-n)}{n^2} \;=\; 2\left(1-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^{n} \sup_{(x,y)\in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \mathrm{Vol}(Q_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(2-\frac{2(i-1)}{n}\right)\cdot\frac{2}{n^2}\right) \;=\; 2\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_Q f(x,y)\, d(x,y) &= \int_0^1\left(\int_0^2 2-x\,dx\right)dy \;=\; \int_0^1 2x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\,dy \\ &= \int_0^1 2\,dy \;=\; 2y|_0^1 \;=\; 2 \end{aligned}$$

Man erhält natürlich:

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right) = U_f(Z) \;\le\; \int_Q f(x,y)\,d(x,y) = 2 \;\le\; O_f(Z) = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\,.$$

Aufgabe 23:

Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y)\,dx\,dy,$

b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 x^2-3y+1\,dx\,dy$ und $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 x^2-3y+1\,dy\,dx,$

c) $\displaystyle\int_Q \frac{y^2-x}{xy^2}\,d(x,y)$ mit $Q=[1,e]\times[1,2].$

Lösung:

a) $$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(x+y)\,dx\,dy &= \int_{\pi}^{2\pi}\sin(x+y)\big|_0^{\pi}\,dy = \int_{\pi}^{2\pi}\sin(\pi+y)-\sin y\,dy\\ &= (\cos y-\cos(\pi+y))\big|_{\pi}^{2\pi} = 4\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\int_0^2\int_0^1 x^2-3y+1\,dx\,dy &= \int_0^2 x^3/3-3yx+x\big|_0^1\,dy\\ &= \int_0^2 4/3-3y\,dy \;=\; 4y/3-3y^2/2\big|_0^2\\ &= 8/3-12/2 \;=\; -10/3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^2 x^2-3y+1\,dy\,dx &= \int_0^1 x^2y-3y^2/2+y\big|_0^2\,dx\\ &= \int_0^1 2x^2-4\,dx \;=\; 2x^3/3-4x\big|_0^1\\ &= 2/3-4 \;=\; -10/3\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\int_Q \frac{y^2-x}{xy^2}\,d(x,y) &= \int_1^2\int_1^e \frac{y^2-x}{xy^2}\,dx\,dy = \int_1^2\int_1^e \frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\,dx\,dy\\ &= \int_1^2 \ln|x|-\frac{x}{y^2}\bigg|_1^e\,dy = \int_1^2 1-\frac{e-1}{y^2}\,dy\\ &= y+\frac{e-1}{y}\bigg|_1^2 = 1+(e-1)\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{3-e}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 24:

Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_2^9\int_0^3\int_0^1 \frac{x^6\sqrt{y+1}}{z-1}\,dx\,dy\,dz,$

b) $\displaystyle\int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\,d(x,y,z) \quad \text{mit} \quad Q=[1,2]\times[0,1]\times[-1,1].$

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
\int_2^9\int_0^3\int_0^1 \frac{x^6\sqrt{y+1}}{z-1}\,dx\,dy\,dz &= \int_2^9\int_0^3\int_0^1 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1}\cdot x^6\,dx\,dy\,dz\\
&= \int_2^9\int_0^3 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1}\left(\int_0^1 x^6\,dx\right)dy\,dz\\
&= \left(\int_0^1 x^6\,dx\right)\cdot\left(\int_2^9\int_0^3 \frac{\sqrt{y+1}}{z-1}\,dy\,dz\right)\\
&= \left(\int_0^1 x^6\,dx\right)\cdot\left(\int_2^9 \frac{1}{z-1}\left(\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy\right)dz\right)\\
&= \left(\int_0^1 x^6\,dx\right)\cdot\left(\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy\right)\cdot\left(\int_2^9 \frac{1}{z-1}\,dz\right)\\
&= \left(\frac{x^7}{7}\Big|_0^1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}(y+1)^{3/2}\Big|_0^3\right)\cdot\left(\ln|z-1|\big|_2^9\right)\\
&= \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot 7\cdot\ln(8) = \ln(4)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_Q \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\,d(x,y,z) &= \int_1^2\int_0^1\int_{-1}^1 \sinh z + \frac{6z^2}{(2x+y)^2}\,dz\,dy\,dx\\
&= \int_1^2\int_0^1 \left(\cosh z + \frac{2z^3}{(2x+y)^2}\right)\Big|_{-1}^1\,dy\,dx\\
&= \int_1^2\int_0^1 \frac{4}{(2x+y)^2}\,dy\,dx = \int_1^2 -\frac{4}{2x+y}\Big|_0^1\,dx\\
&= \int_1^2 -\frac{4}{2x+1}+\frac{2}{x}\,dx = \left(-2\ln|2x+1|+2\ln|x|\right)\big|_1^2\\
&= -2\ln 5 + 2\ln 2 + 2\ln 3 = \ln\frac{36}{25}
\end{aligned}$$