Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Implizite Funktionen:

Untersucht wird die Auflösbarkeit der Gleichungssystems

$$\begin{aligned} g_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) &= 0\,, \end{aligned}$$

kurz mit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ bezeichnet, nach der Variablen $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.

In diesem Fall wäre $\boldsymbol{y}$ als Funktion von $\boldsymbol{x}$ darstellbar, d.h. es würde $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ gelten mit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$.

In der Gleichung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ wäre also implizit die Funktion $\boldsymbol{f}$ enthalten.

Satz über implizite Funktionen

Gegeben sei eine C^1-Funktion $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und ein Punkt $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) \in D$ mit $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^m$, für den $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) = \boldsymbol{0}$ gilt.

Außerdem sei die folgende $m \times m$ Teilmatrix von $\boldsymbol{Jg}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$ regulär:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0) \end{pmatrix} .$$

Dann gibt es offene Mengen $U \in \mathbb{R}^n$ und $V \in \mathbb{R}^m$ mit $\boldsymbol{x}^0 \in U$, $\boldsymbol{y}^0 \in V$ und $U \times V \in D$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\boldsymbol{f} : U \to V$ mit

$$\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in U .$$

Die Jacobimatrix $\boldsymbol{Jf}$ berechnet sich für alle $\boldsymbol{x} \in U$ durch Differentiation der impliziten Gleichung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$ (nach der Kettenregel), also aus dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) + \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} .$$

Implizite Darstellung ebener Kurven:

Für eine C^1-Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wird die durch

$$g(x, y) = 0$$

gegebene Lösungsmenge untersucht. Auflösbarkeit der Gleichung nach einer der Variablen ist gewährleistet, wenn $g_x \neq 0$ oder $g_y \neq 0$, also

$$\operatorname{grad} g \neq \mathbf{0}$$

gilt. Die Punkte (x_0, y_0) für die $\operatorname{grad} g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ gilt, heißen daher **regulär**. In regulären Punkten wird die Lösungsmenge $g = 0$ also durch eine Höhenlinie beschrieben.

Dabei liegt eine **horizontale Tangente** in (x_0, y_0) vor, falls insgesamt

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g_x(x_0, y_0) = 0, \quad g_y(x_0, y_0) \neq 0$$

gilt und eine **vertikale Tangente** für

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad g_x(x_0, y_0) \neq 0, \quad g_y(x_0, y_0) = 0\ .$$

Die Punkte (x_0, y_0) für die $\operatorname{grad} g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ gilt, werden als **singulär** oder auch **stationär** bezeichnet.

Klassifikation singulärer Punkte von $g(x, y) = 0$:

(x_0, y_0) ist **isolierter Punkt**, falls $\det \boldsymbol{H} g(x_0, y_0) > 0$,

(x_0, y_0) ist **Doppelpunkt**, falls $\det \boldsymbol{H} g(x_0, y_0) < 0$.

Aufgabe 17:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - xy = 0$$

implizit gegebene Kurve.

a) Man bestimme die Symmetrien der Kurve.

Die Kurve ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden, d.h. es gilt $f(x,y) = f(y,x)$. Wir erinnern uns dabei an die Spiegelungsmatrix $\boldsymbol{S}_\alpha$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2\cdot\pi/4) & \sin(2\cdot\pi/4) \\ \sin(2\cdot\pi/4) & -\cos(2\cdot\pi/4) \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{S}_{\pi/4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

b) Man bestimme die Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente.

$\mathrm{grad} f(x,y) = (3x^2 - y, 3y^2 - x)^T$

Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x,y) \neq 0\,.$$

$$0 = f_x(x,y) = 3x^2 - y \quad \Rightarrow \quad y = 3x^2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = f(x, 3x^2) = x^3 + (3x^2)^3 - x3x^2 = x^3(27x^3 - 2)$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \vee x = \frac{2^{1/3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\; P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{1/3} \\ 2^{2/3} \end{pmatrix}\,.$$

Nur für P_1 gilt die Bedingung $f_y(P_1) \neq 0$.

Also ist P_1 ein Punkt mit horizontaler Tangente.

c) Man bestimme die Kurvenpunkte mit mit vertikaler Tangente.

Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_y(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x,y) \neq 0\,.$$

$$0 = f_y(x,y) = 3y^2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 3y^2 \quad \Rightarrow$$

$$0 = f(3y^2, y) = (3y^2)^3 + y^3 - 3y^2 y = y^3(27y^3 - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y = 0 \vee y = \frac{2^{1/3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\; P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{2/3} \\ 2^{1/3} \end{pmatrix}\,.$$

Nur für P_2 gilt die Bedingung $f_x(P_2) \neq 0$.

Also ist P_2 ein Punkt mit vertikaler Tangente.

Dieses ergibt sich auch ohne Rechnung aus der Symmetrie.

d) Man klassifiziere die singulären Punkte der Kurve.

Für $P_0 = (0,0)^T$ gilt $\operatorname{grad} f(0,0) = \mathbf{0}$,
damit ist P_0 ein singulärer Punkt.

$$\boldsymbol{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\det \boldsymbol{H} f(0,0) = -1 < 0$ handelt es sich bei P_0 um einen Doppelpunkt.

e) Man zeichne die Niveaumenge:

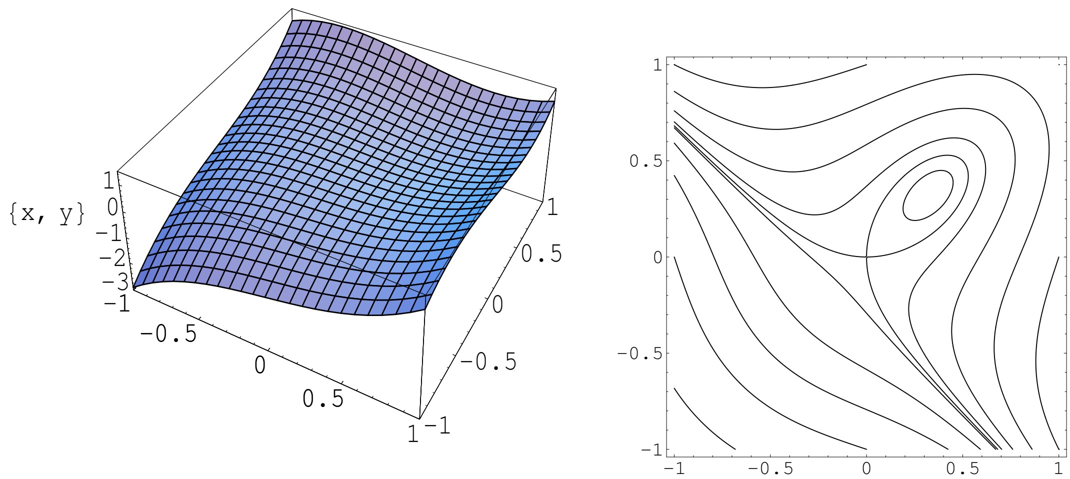


Bild 17 $\quad f(x,y) = x^3 + y^3 - xy = c$

für $c = -2, -1, -0.5, -0.2, -0.025, 0, 0.05, 0.2, 0.5, 1$

Tangentialebenen implizit dargestellter Flächen:

Die Lösungsmenge

$$g(x, y, z) = 0$$

einer C^1-Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ beschreibt in (x_0, y_0, z_0) mit $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ lokal eine Fläche, falls $\operatorname{grad} g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ gilt.

Gilt beispielsweise $g_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, so liegt Auflösbarkeit nach $z = z(x, y)$ vor, mit $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Die Parameterform der Tangentialebene im $\mathbb{R}^3$ an den Funktionsgraphen $(x, y, z(x, y))^T$ ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen erhält man

$(g_x(x_0, y_0, z_0), g_y(x_0, y_0, z_0)) + g_z(x_0, y_0, z_0)\,(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0)) = (0, 0)$,

und damit

$$(z_x(x_0, y_0), z_y(x_0, y_0)) = -\left(\frac{g_x(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}, \frac{g_y(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)}\right).$$

Die Richtungsvektoren der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{g_x(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{g_y(x_0, y_0, z_0)}{g_z(x_0, y_0, z_0)} \end{pmatrix}$$

stehen dabei senkrecht auf

$\operatorname{grad} g(x_0, y_0, z_0) = (g_x(x_0, y_0, z_0), g_y(x_0, y_0, z_0), g_z(x_0, y_0, z_0))^T$.

Aufgabe 18:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3\,.$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(-1, 1, -2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

Durch quadratische Ergänzungen kann h übersichtlicher dargestellt werden:

$$h(x, y, z) = z^2+y^2-x^2+4z-2x+3 = (z+2)^2+y^2-(x+1)^2$$

Wegen $h(-1, 1, -2) = 1$ stellt sich die Niveaumenge als einschaliges Hyperboloid heraus und wird damit durch die standardisierte implizite Gleichung

$$g(x, y, z) := (z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 - 1 = 0$$

beschrieben.

Um festzustellen, ob $g(x, y, z) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(-1, 1, -2)$ eine glatte Fläche bildet muss die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen überprüft werden:

grad $g(x, y, z) = (-2(x + 1), 2y, 2(z + 2))^T \;\Rightarrow$
grad $g(-1, 1, -2) = (0, 2, 0)^T$.

Damit ist nur $g_y(-1,1,-2) = 2$ invertierbare 1×1 Untermatrix.

Nach dem Satz über implizite Funktionen bildet die Niveaumenge also eine glatte Fläche, die durch Auflösen von $g(x,y,z) = 0$ nach y beschreibbar ist,
d.h. es gilt in einer Umgebung von $(-1,1,-2)$

$$y = f(x,z), \quad \text{mit} \quad f(-1,-2) = 1 \quad \text{und} \quad g(x, f(x,z), z) = 0.$$

b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

Auflösen der impliziten Gleichung $g(x,y,z) = 0$ ergibt zunächst

$$y = \pm\sqrt{1 + (x+1)^2 - (z+2)^2}.$$

Aus diesen beiden Möglichkeiten folgt
wegen $y = f(-1,-2) = 1$

$$f(x,z) = \sqrt{1 + (x+1)^2 - (z+2)^2}\,.$$

c) Man gebe im Punkt $(-1, 1, -2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

In $(-1, 1, -2)$ wird die Fläche f näherungsweise beschrieben durch die zugehörige Tangentialebene T_1, in vektorwertiger Schreibweise bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x,z) \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ T_1(x,z;-1,-2) \\ z \end{pmatrix}$$

Zur Darstellung der Tangentialebene wird die durch implizites Differenzieren der Gleichung $g(x, f(x,z), z) = 0$ mittels Kettenregel entstehende Jacobimatrix von f benötigt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} f(x,z) &= (f_x, f_z) = -(g_y)^{-1}(g_x, g_z) \\ &= -\frac{1}{2y}(-2x-2, 2z+4) \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{J} f(-1,-2) &= -\frac{1}{2\cdot 1}(0,0) = (0,0)\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Parameterform der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} x \\ T_1(x,z;-1,-2) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(-1,-2) + \boldsymbol{J} f(-1,-2) \begin{pmatrix} x+1 \\ z+2 \end{pmatrix} \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (x+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (z+2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

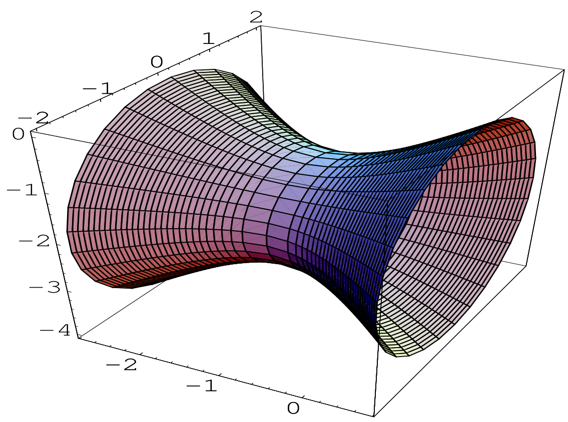
d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Unter Verwendung von Polarkoordinaten kann die Fläche

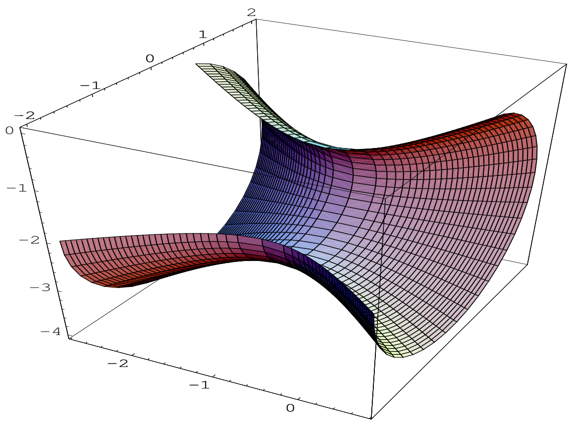
$$h(x, y, z) = (z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 1$$

folgendermaßen durch $(r, \varphi) \in [1, R] \times [0, 2\pi]$ parametrisiert werden:

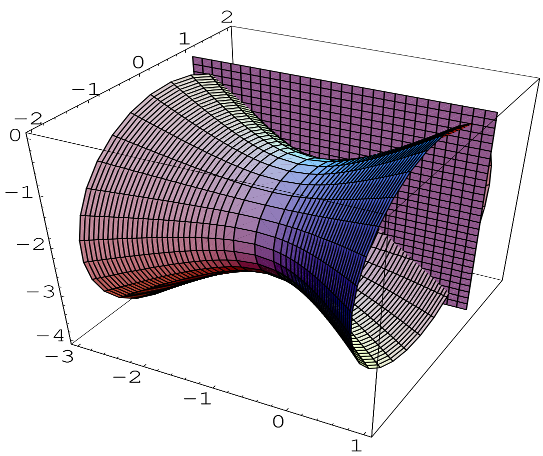
$$y = r\cos\varphi, z = r\sin\varphi - 2 \Rightarrow p_{\pm}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{r^2 - 1} \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi - 2 \end{pmatrix}$$



ohne Tangentialebene



aufgeschnitten



mit Tangentialebene

Bild 18 einschaliges Hyperboloid $(z + 2)^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 1$

Extremalprobleme mit Gleichungsnebenbedingungen:

Gesucht sind die Extremwerte einer C^1-Funktion

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

auf der folgenden Teilmenge des Definitionsbereiches:

$$G := \{\boldsymbol{x} \in D \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \ \subset \ D\,.$$

mit einer C^1-Funktion

$$\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$$

und $m < n$, d.h. die Extremalwerte müssen zusätzlich noch die m Gleichungen

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))^T = \boldsymbol{0}$$

erfüllen.

Satz: (Lagrange-Multiplikatoren-Regel)

Sei $\boldsymbol{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$, das die **Regularitätsbedingung**

$$\text{Rang } \boldsymbol{Jg}(\boldsymbol{x}^0) = m$$

erfüllt. Dann gibt es **Lagrange-Multiplikatoren** $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so dass die **Lagrange-Funktion**

$$F(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$$

die **notwendige Bedingung erster Ordnung** erfüllt:

$$\text{grad } F(\boldsymbol{x}^0) = \text{grad } f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \text{grad } g_i(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}\,.$$

Satz: (hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)

Gilt Rang $\boldsymbol{Jg}(\boldsymbol{x}^0) = m$ für $\boldsymbol{x}^0 \in G$ und

grad $F(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$ und ist $\boldsymbol{H}F(\boldsymbol{x}^0)$ positiv definit auf

$$TG(\boldsymbol{x}^0) := \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle \text{grad } g_i(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{y} \right\rangle = 0\right\}\ ,$$

d.h. gilt $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{H}F(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{y} > 0$ für $\boldsymbol{y} \in TG(\boldsymbol{x}^0) \backslash \{\boldsymbol{0}\}$,

dann besitzt f in $\boldsymbol{x}^0$ ein strenges lokales Minimum unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

Aufgabe 19:

Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$.

a) Unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

sollen die Extremalpunkte der Funktion

$$f(x,y) = x + y$$

unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel bestimmt werden.

Regularitätsbedingung:

grad $g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$,

d.h. nur $(0,0)$ verletzt die Regularitätsbedingung.
Da $g(0,0) = -1$ gilt, liegt $(0,0)$ nicht auf dem Kreis liegt.

Alle zulässigen Punkte, d.h. $g(x,y) = 0$, erfüllen also die Regularitätsbedingung

$$\text{Rang}(\boldsymbol{J}g(x,y)) = 1.$$

Lagrange-Funktion: $F(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y und die zweite mit x und subtrahiert beide, so erhält man

$$x - y = 0 \;\Rightarrow\; x = y.$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich dann $x^2 + x^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

<u>Extremalkandidaten</u>:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\,, \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\,.$$

Da die Menge $g(x,y) = 0$ einen Kreis beschreibt, ist sie kompakt.

Damit nimmt die stetige Funktion f auf $g(x,y) = 0$ Maximum und Minimum an.

Es ist $f(P_1) = \sqrt{2}$ und $f(P_2) = -\sqrt{2}$.

Also ist P_1 Maximum und P_2 Minimum.

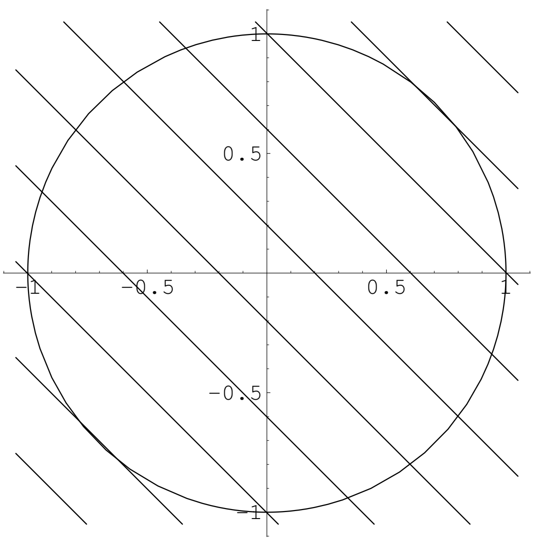


Bild 19 a) Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ mit Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = x + y$

b) Parametrisierung des Kreises durch $\boldsymbol{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\boldsymbol{c}(t))$.

Der Kreis $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ kann durch Polarkoordinaten parametrisiert werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} =: \boldsymbol{c}(t)\,, \quad 0 \le t < 2\pi\,,$$

d.h. es gilt $g(\cos t, \sin t) = 0$. Man muss jetzt also nur noch die Extrema der Funktion

$$h(t) := f(\boldsymbol{c}(t)) = \cos t + \sin t$$

finden.

$$h'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}\,,\; t_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$h''(t) = -\cos t - \sin t \quad \Rightarrow \quad h''(t_1) = -\sqrt{2} < 0, h''(t_2) = \sqrt{2}.$$

Damit liegt für $t_1 = \pi/4$ ein Maximum
mit dem Funktionswert $h(t_1) = \sqrt{2}$ und für

$t_2 = 5\pi/4$ ein Minimum
mit dem Funktionswert $h(t_2) = -\sqrt{2}$ vor.

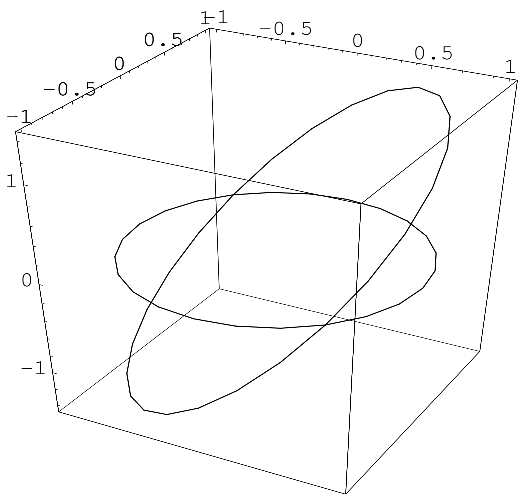


Bild 19 b) $\boldsymbol{c}(t)$ und $f(\boldsymbol{c}(t)) = \cos t + \sin t$

Aufgabe 20:

Für die Funktion $f(x, y, z) = z^2$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Nebenbedingungen:

$g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 9 \quad \text{und} \quad g_2(x, y, z) = y - z \ .$

Regularitätsbedingung:

$\boldsymbol{Jg}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ besitzt den Rang < 2,

wenn die erste Zeile gleich dem Nullvektor ist,

d.h. für die Punkte $(0, 0, z)$.

Diese sind wegen $g_1(0, 0, z) = -9$ jedoch nicht zulässig.

Alle zulässigen Punkte erfüllen also die Regularitätsbedingung.

Die Lagrangesche Multiplikatorregel kann angewendet werden:

Lagrange-Funktion:

$F(x, y, z) = z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 9) + \lambda_2(y - z)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z - \lambda_2 \\ x^2 + y^2 - 9 \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung: 1.Fall: $x = 0 \Rightarrow 0 = g_1(0, y, z) = y^2 - 9$

$$\Rightarrow\ y = 3 = z\ \vee\ y = -3 = z$$

<u>Extremalkandidaten</u>: $\quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda_1 = 0\ \Rightarrow\ \lambda_2 = 0\ \Rightarrow\ z = 0 = y\ \Rightarrow\ x = 3\ \vee\ x = -3$

<u>Extremalkandidaten</u>: $\quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die stetige Funktion f nimmt auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ ihr absolutes Maximum und Minimum an, da diese Schnittmenge eine Ellipse und damit kompakt ist.

Unter den Extremalkandidaten befinden sich also absolutes Maximum und Minimum.

Die Funktionswerte der Extremalkandidaten lauten

$$f(P_{1,2}) = 9\,, \quad f(P_{3,4}) = 0\,.$$

Also sind $P_{1,2}$ absolute Maxima und $P_{3,4}$ absolute Minima.

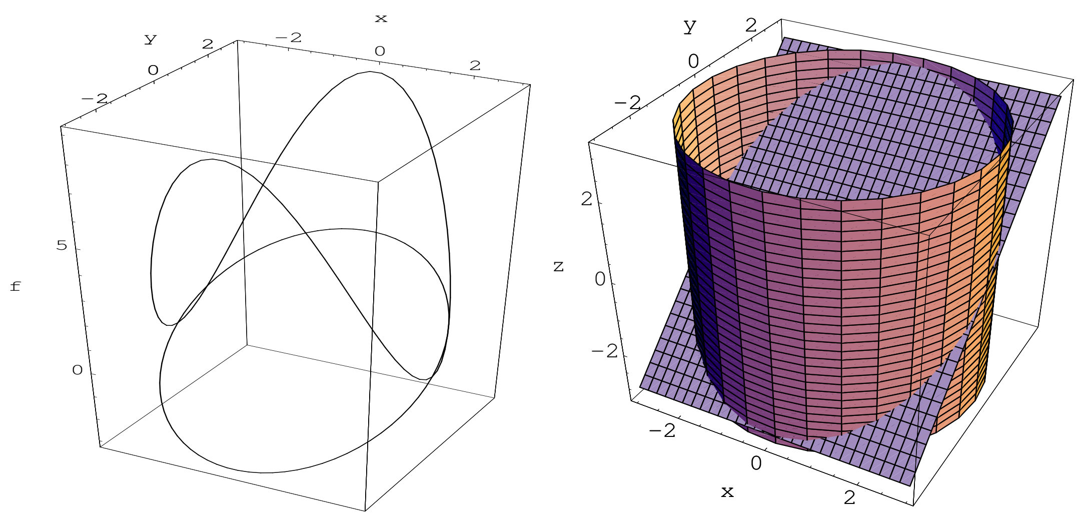


Bild 20: f auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$