Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Taylor-Entwicklung:

Gegeben sei eine m-mal stetig partiell differenzierbare Funktion

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \;\to\; \mathbb{R}\,,$$

$$(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{x} \;\mapsto\; y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

mit offenem und konvexem Definitionsbereich D und $n, m \in \mathbb{N}$.

Multiindizes

Im Vektor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$

gibt α_i an,

wie oft f nach x_i abgeleitet wird.

Man definiert

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\,, \quad \boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_n!\,.$$

Damit können folgende $|\boldsymbol{\alpha}|$-fache

Ableitungen von f und Polynome vom Grad $|\boldsymbol{\alpha}|$

beschrieben werden:

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} f := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad , \qquad \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}\,.$$

Damit wird das **Taylor-Polynom** m-ten Grades von f zum **Entwicklungspunkt** $\boldsymbol{x}^0$ definiert durch

$$T_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}^0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^{\boldsymbol{\alpha}}\,.$$

Beispiel:

Für $n = 3$, $m = 2$ und $\boldsymbol{\alpha} = (0,1,1)$ erhält man den Summanden

$$\begin{aligned}
&\frac{D^{(0,1,1)} f(\boldsymbol{x}^0)}{(0,1,1)!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^{(0,1,1)} \\
= \;& \frac{1}{0!\cdot 1!\cdot 1!}\cdot\frac{\partial^{0+1+1} f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x^0 \partial y^1 \partial z^1}(x-x_0)^0(y-y_0)^1(z-z_0)^1 \\
= \;& \frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y \partial z}(y-y_0)(z-z_0) \\
= \;& f_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0).
\end{aligned}$$

Für $|\boldsymbol{\alpha}| = m = 2$ sind noch folgende weitere Summanden im Taylor-Polynom zu berücksichtigen

$$\boldsymbol{\alpha} = (2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2),\ (1,1,0),\ (1,0,1).$$

Das Taylor-Polynom T_m besitzt dann folgende

Summanden mit zweiten Ableitungen von f

$$
\begin{aligned}
\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}^0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^{\boldsymbol{\alpha}} \;=\; & \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 \\
& +f_{yy}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 \\
& +f_{zz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2 \\
& +2f_{xy}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) \\
& +2f_{xz}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) \\
& +2f_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0)).
\end{aligned}
$$

Eine **alternative Darstellung** des Summationsanteils der k-ten Ableitungen im Taylor-Polynom von f ist gegeben durch

$$\frac{1}{k!}\left(\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla\right)^k f\right)(\boldsymbol{x}^0) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}^0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Beispiel

Für $n = 2$ und $k = 3$ erhält man beispielsweise

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3!}\left(\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla\right)^3 f\right)(\boldsymbol{x}^0)\\
=\ &\frac{1}{6}\left(\left((x-x_0, y-y_0)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\right)^3 f\right)(x_0,y_0)\\
=\ &\frac{1}{6}\left(\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\right)(x_0,y_0)\\
=\ &\frac{1}{6}\left(\left((x-x_0)^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3(x-x_0)^2(y-y_0)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\right.\right.\\
&\left.\left.+3(x-x_0)(y-y_0)^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+(y-y_0)^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right) f\right)(x_0,y_0)\\
=\ &\frac{1}{6}\big(f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3+3f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)\\
&+3f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2+f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\big)
\end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom besitzt also die Darstellungen

$$\begin{aligned} T_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0) &= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}^0)}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^{\boldsymbol{\alpha}} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\left(\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^T\nabla\right)^j f\right)(\boldsymbol{x}^0). \end{aligned}$$

Beispiele für Taylor-Polynome:

a)
$$\begin{aligned} T_2(x,y;x_0,y_0) &= f(x_0,y_0) \\ &\quad + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &\quad\quad + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2) \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
T_2(x,y,z;x_0,y_0,z_0) \;=\; & f(x_0,y_0,z_0) \\
& + f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) \\
& + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) \\
& + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) \\
& + \frac{1}{2}\big(f_{xx}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)^2 \\
& \quad + f_{yy}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)^2 \\
& \quad + f_{zz}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)^2 \\
& \quad + 2f_{xy}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(y-y_0) \\
& \quad + 2f_{xz}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)(z-z_0) \\
& \quad + 2f_{yz}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)(z-z_0)\big)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
T_3(x,y;x_0,y_0) \;=\; & f(x_0,y_0) \\
& +f_x(x_0,y_0)(x-x_0) \\
& +f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
& +\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \\
& \quad +2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\
& \quad +f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2) \\
& +\frac{1}{6}(f_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 \\
& \quad +3f_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) \\
& \quad +3f_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 \\
& \quad +f_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3)
\end{aligned}
$$

Satz von Taylor:

Ist f $(m+1)$-mal stetig partiell differenzierbar,

so gilt für die **Taylor-Entwicklung**

$$f(\boldsymbol{x}) = T_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0) + R_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)$$

die folgende **Restgliedformel nach Lagrange**

mit $\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{x}^0 + \Theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$ und $0 < \Theta < 1$

$$\begin{aligned} R_m(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_0) &= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m+1} \frac{D^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{\xi})}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)^{\boldsymbol{\alpha}} \\ &= \frac{1}{(m+1)!}\left(\left((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T\nabla\right)^{(m+1)} f\right)(\boldsymbol{\xi})\,. \end{aligned}$$

Beispiele:

a)

$$\begin{aligned} R_2(x,y;x_0,y_0) &= \frac{1}{3!}(f_{xxx}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^3 \\ &\quad +3f_{xxy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^2(y-y_0) \\ &\quad +3f_{xyy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)(y-y_0)^2 \\ &\quad +f_{yyy}(\xi_1,\xi_2)(y-y_0)^3) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} R_3(x,y;x_0,y_0) &= \frac{1}{4!}(f_{xxxx}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^4 \\ &\quad +4f_{xxxy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^3(y-y_0) \\ &\quad +6f_{xxyy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)^2(y-y_0)^2 \\ &\quad +4f_{xyyy}(\xi_1,\xi_2)(x-x_0)(y-y_0)^3 \\ &\quad +f_{yyyy}(\xi_1,\xi_2)(y-y_0)^4) \end{aligned}$$

Aufgabe 13:

Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3 \,.$$

Lösung:

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3 \;\Rightarrow\; f(0, 0, 0) = 1$$

$$f_x(x, y, z) = y + 2x(1 - y)^2 \;\Rightarrow\; f_x(0, 0, 0) = 0$$

$$f_y(x, y, z) = x - 2x^2(1 - y) + 3(y + z)^2 \;\Rightarrow\; f_y(0, 0, 0) = 0$$

$$f_z(x, y, z) = 1 + 3(y + z)^2 \;\Rightarrow\; f_y(0, 0, 0) = 1$$

$$f_{xx}(x, y, z) = 2(1 - y)^2 \;\Rightarrow\; f_{xx}(0, 0, 0) = 2$$

$$f_{xy}(x, y, z) = 1 - 4x(1 - y) \;\Rightarrow\; f_{xy}(0, 0, 0) = 1$$

$$f_{xz}(x, y, z) = 0 \;\Rightarrow\; f_{xz}(0, 0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(x, y, z) = 2x^2 + 6(y + z) \;\Rightarrow\; f_{yy}(0, 0, 0) = 0$$

$$f_{yz}(x, y, z) = 6(y + z) \;\Rightarrow\; f_{yz}(0, 0, 0) = 0$$

$$f_{zz}(x, y, z) = 6(y + z) \;\Rightarrow\; f_{zz}(0, 0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_2(x,y,z;0,0,0) &= f(0,0,0) \\
&\quad +f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z \\
&\quad +\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0,0)x^2 + f_{yy}(0,0,0)y^2 \\
&\quad +f_{zz}(0,0,0)z^2 + 2f_{xy}(0,0,0)xy \\
&\quad +2f_{xz}(0,0,0)xz + 2f_{yz}(0,0,0)yz) \\
&= 1 + z + xy + x^2
\end{aligned}$$

$$f(x,y,z) = 1+z+xy+x^2-2yx^2+x^2y^2+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3 .$$

Aufgabe 14: (Klausur SoSe 2008)

Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ der folgenden Funktion

$$h(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$$

und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Rechteck $[0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$ verwendet, nach oben ab.

Lösung:

$$h(x,y) = \cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h(0,0) = 1$$

$$h_x(x,y) = -2x\sin(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_x(0,0) = 0$$

$$h_y(x,y) = -2y\sin(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_y(0,0) = 0$$

$$h_{xx}(x,y) = -2\sin(x^2 + y^2) - 4x^2\cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{xx}(0,0) = 0$$

$$h_{xy}(x,y) = -4xy\cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{xy}(0,0) = 0$$

$$h_{yy}(x,y) = -2\sin(x^2 + y^2) - 4y^2\cos(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad h_{yy}(0,0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad T_2(x,y;0,0) &= h(0,0) + h_x(0,0)x + h_y(0,0)y \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(h_{xx}(0,0)x^2 + h_{xy}(0,0)xy + h_{yy}(0,0)y^2\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

MATLAB-Befehl für den Flächenplot:

```
ezsurf('cos(x^2+y^2)',[-2.5,2.5,-2.5,2.5])
```

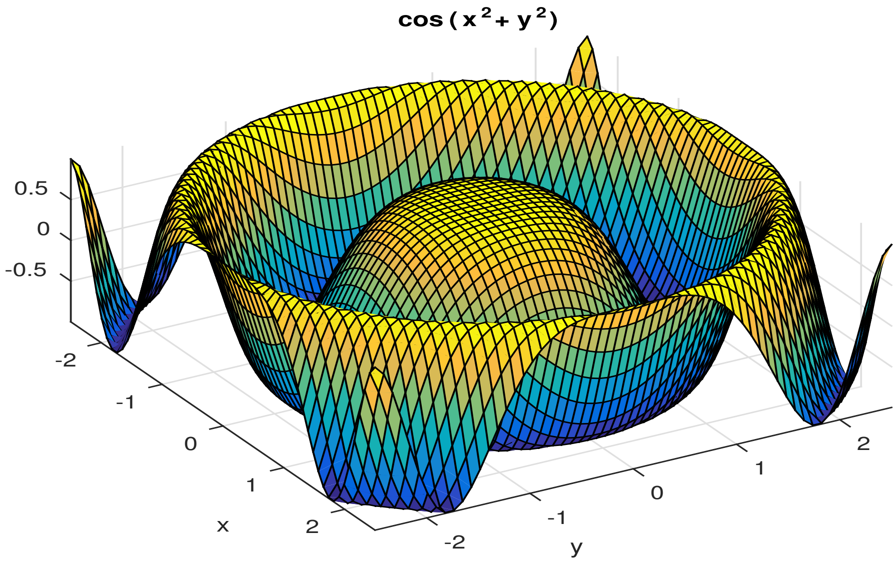


Bild 14: $h(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

Für die Fehlerabschätzung sind die dritten Ableitungen erforderlich

$$\begin{aligned}
h_{xxx}(x,y) &= -12x\cos(x^2+y^2)+8x^3\sin(x^2+y^2)\\
h_{xxy}(x,y) &= -4y\cos(x^2+y^2)+8x^2y\sin(x^2+y^2)\\
h_{xyy}(x,y) &= -4x\cos(x^2+y^2)+8y^2x\sin(x^2+y^2)\\
h_{yyy}(x,y) &= -12y\cos(x^2+y^2)+8y^3\sin(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung für beliebiges $(x,y)\in[0,\pi/4]\times[0,\pi/4]$ zieht mit $\theta\in]0,1[$ ein beliebiges

$$(\xi_1,\xi_2):=(0,0)+\theta(x,y)\in]0,\pi/4[\times]0,\pi/4[$$

nach sich.

Mit der Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man:

$$\begin{aligned}
&|h(x,y)-T_2(x,y;0,0)|=|R_2(x,y;0,0)|\\
=\ &\frac{1}{3!}\left|h_{xxx}(\xi_1,\xi_2)x^3+3h_{xxy}(\xi_1,\xi_2)x^2y+3h_{xyy}(\xi_1,\xi_2)xy^2+h_{yyy}(\xi_1,\xi_2)y^3\right|\\
\le\ &\frac{1}{3!}\big(|h_{xxx}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|x|^3+3\,|h_{xxy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|x^2y|\\
&+3\,|h_{xyy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|xy^2|+|h_{yyy}(\xi_1,\xi_2)|\cdot|y^3|\big)\,.
\end{aligned}$$

Jeder der vier Summanden kann nun jeweils noch oben abgeschätzt werden. Dabei wird $|\sin t| \leq 1$ und $|\cos t| \leq 1$ verwendet.

$$\begin{aligned}
& |h_{xxx}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x|^3 \\
= \; & \left|-12\xi_1 \cos(\xi_1^2 + \xi_2^2) + 8\xi_1^3 \sin(\xi_1^2 + \xi_2^2)\right| \cdot |x|^3 \\
\leq \; & \big(|-12\xi_1| \cdot |\cos(\xi_1^2 + \xi_2^2)| + |8\xi_1^3| \cdot |\sin(\xi_1^2 + \xi_2^2)|\big) \cdot |x|^3 \\
\leq \; & \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3
\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$3\,|h_{xxy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x^2 y| \leq 3\left(4 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$3\,|h_{xyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |x y^2| \leq 3\left(4 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$|h_{yyy}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |y^3| \leq \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} + 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

Insgesamt erhält man also

$$|h(x,y) - T_2(x,y;0,0)| \leq \frac{\pi^3}{3!4^3}\left(48 \cdot \frac{\pi}{4} + 64 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^3\right) = 5.5476...$$

Der Maximalfehler wird angenommen für $x = y = \dfrac{\pi}{4}$.

$$|h\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) - T_2\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}; 0, 0\right)| = |\cos\left(2 \cdot \frac{\pi^2}{4^2}\right) - 1| = 0.669252...$$

Extrema von Funktionen mehrerer Variablen:

Gegeben sei eine Funktion

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

und $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$.

Definition:

Für $\boldsymbol{x}^0 \in D$ definiert man:

a) f besitzt in $\boldsymbol{x}^0$ ein **globales Maximum**, falls $\forall \boldsymbol{x} \in D$ gilt: $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^0)$.

b) f besitzt in $\boldsymbol{x}^0$ ein **lokales Maximum**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $\boldsymbol{x} \in D$ mit $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0|| < \varepsilon$ gilt: $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^0)$.

c) Kann in a) und b) für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0$ die Ungleichung $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^0)$ durch $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}^0)$ ersetzt werden, so handelt es sich um ein **strenges Maximum** in $\boldsymbol{x}^0$.

d) Gilt in a) und b) $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^0)$ und in c) $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}^0)$, so liegt entsprechend ein **Minimum** in $\boldsymbol{x}^0$ vor.

e) f besitzt in $\boldsymbol{x}^0$ ein **Extremum**, falls es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

f) f besitzt in $\boldsymbol{x}^0 \in D^0$ einen **stationären Punkt**, falls grad $f(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$ gilt.

Satz: (notwendige Bedingung 1. Ordnung)

Sei f in D^0 eine C^1-Funktion und $\boldsymbol{x}^0 \in D^0$ ein **lokales Extremum**, dann gilt

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}\,.$$

Für eine zweimal partiell differenzierbare Funktion bezeichnet

$$\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

die **Hessematrix** von f.

Satz: (notwendige Bedingung 2. Ordnung)

Ist f eine C^2-Funktion und $\boldsymbol{x}^0 \in D^0$ ein stationärer Punkt, dann gilt:

a) Ist $\boldsymbol{x}^0 \in D$ ein **lokales Minimum**, dann ist $\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}^0)$ positiv semidefinit.

b) Ist $\boldsymbol{x}^0 \in D$ ein **lokales Maximum**, dann ist $\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}^0)$ negativ semidefinit.

Satz: (hinreichende Bedingung 2. Ordnung)

Ist f eine C^2-Funktion und $\boldsymbol{x}^0 \in D^0$ ein stationärer Punkt, dann gilt:

a) Ist $\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}^0)$ positiv definit, dann ist $\boldsymbol{x}^0$ ein strenges lokales Minimum.

b) Ist $\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}^0)$ negativ definit, dann ist $\boldsymbol{x}^0$ ein strenges lokales Maximum.

c) Ist $\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x}^0)$ indefinit, dann ist $\boldsymbol{x}^0$ ein **Sattelpunkt**.

Aufgabe 15:

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$,

grad $f(x,y) =$
$e^{-x^2-y^2}(2x(1-x^2+y^2), 2y(-1-x^2+y^2))^T = (0,0)^T$

Zur Berechnung der stationären Punkte werden für $f_x(x,y) = 0$ alle Fälle untersucht.

1.Fall: $x = 0$

$\Rightarrow\ 0 = f_y(0,y) = e^{-y^2}2y(-1+y^2)$

$\Rightarrow\quad y = 0, \quad y = 1, \quad y = -1$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte:

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (0,1), \quad P_3 = (0,-1)$$

2.Fall: $1 - x^2 + y^2 = 0$

$\Rightarrow\ x^2 = 1 + y^2$

$\Rightarrow\ 0 = f_y(x,y) = e^{-(1+y^2)-y^2}2y(-1-(1+y^2)+y^2)$
$\quad = -4ye^{-1-2y^2}$

$\Rightarrow\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \quad x = -1$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte: $P_4 = (1,0), \quad P_5 = (-1,0)$

$$\boldsymbol{H}f(x,y) =$$

$$2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 1-5x^2+2x^4+y^2-2x^2y^2 & 2xy(x^2-y^2) \\ 2xy(x^2-y^2) & -1+5y^2-2y^4-x^2+2x^2y^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit}$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = (0,0) \text{ ist Sattelpunkt.}$$

$$\boldsymbol{H}f(0,\pm 1) = 2e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit}$$

$$\Rightarrow \; P_{2,3} = (0,\pm 1) \text{ sind Minima.}$$

$$\boldsymbol{H}f(\pm 1,0) = -2e^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit}$$

$$\Rightarrow \; P_{4,5} = (\pm 1,0) \text{ sind Maxima.}$$

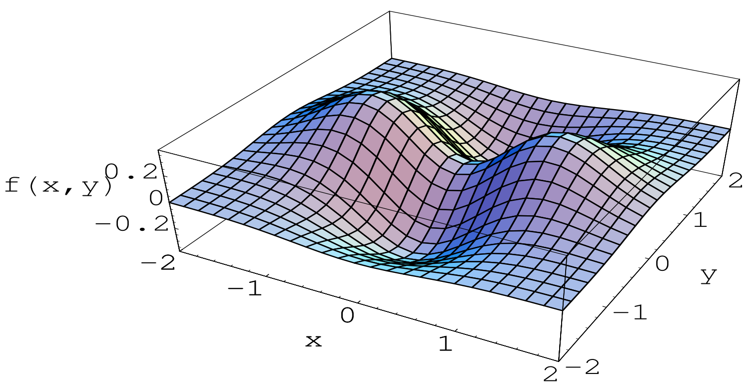


Bild 15 a): $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$

b) $f(x,y) = y(y^2-3)$,

grad $f(x,y) = (0, 3y^2-3)^T = (0,0)^T \Rightarrow y = \pm 1,\ x \in \mathbb{R}$

Die stationären Punkte liegen auf den Geraden
$P_1(x) = (x,1)$ und $P_2(x) = (x,-1)$.

$$\boldsymbol{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H} f(x,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit
$\Rightarrow \quad P_1(x) = (x,1)$ sind keine lokalen Maxima.

$\boldsymbol{H} f(x,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ ist negativ semidefinit
$\Rightarrow \quad P_2(x) = (x,-1)$ sind keine lokalen Minima.

f ist unabhängig von x, d.h. für festes $y = c$ gilt $f(x,c) = \mathit{konstant}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Die Extrema sind also die von $g(y) = y(y^2-3)$, d.h. alle Punkte der Geraden $P_1(x) = (x,1)$ sind lokale Minima und für $P_2(x) = (x,-1)$ erhält man lokale Maxima.

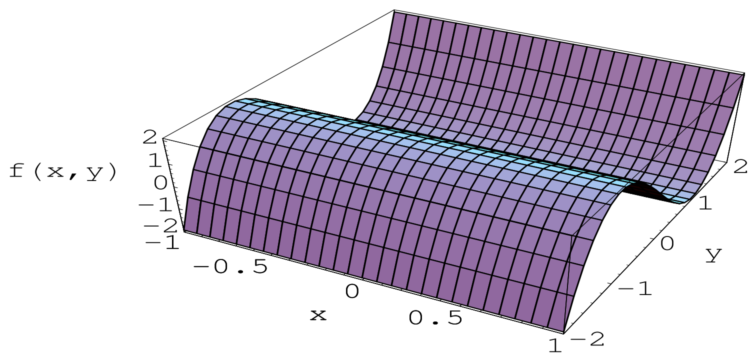


Bild 15 b): $f(x,y) = y(y^2-3)$

c) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$,
$\operatorname{grad} f(x,y) = 2\cos(x^2+y^2)(x,y)^T = (0,0)^T$

Die stationären Punkte sind also gegeben durch $(0,0)$ und alle Punkte P, für die $x^2+y^2 = \pi/2 + n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$$\boldsymbol{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2) & -4xy\sin(x^2+y^2) \\ -4xy\sin(x^2+y^2) & 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\Rightarrow \quad (0,0)$ ist Minimum.

$$\boldsymbol{H} f(P) = \begin{pmatrix} -4x^2\sin(x^2+y^2) & -4xy\sin(x^2+y^2) \\ -4xy\sin(x^2+y^2) & -4y^2\sin(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

ist semidefinit, denn $\det \boldsymbol{H} f(P) = 0$.

Wir klassifizieren daher anders:

Für die Punkte P auf den Kreisen $x^2+y^2 = \pi/2 + n\pi$ gilt $\sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$.

Deshalb liegen für gerades n Maxima und für ungerades n Minima auf diesen Kreisen vor.

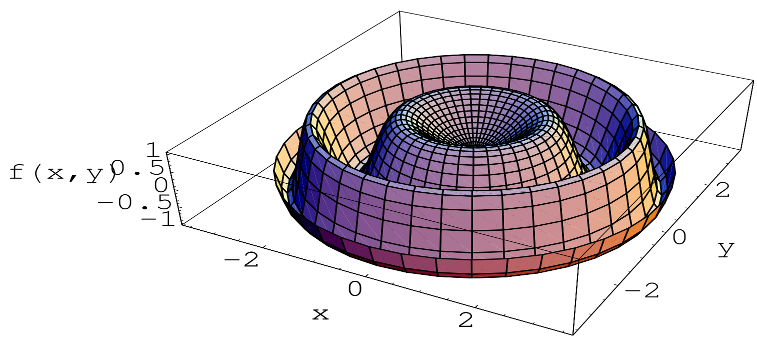


Bild 15 c): $\quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

d) $f(x,y) = |x+y|$.

Für $x+y \neq 0$ ist $f(x,y) = |x+y|$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{cases} (1,1)^T & , \ x+y>0 \\ -(1,1)^T & , \ x+y<0. \end{cases}$$

In den offenen Halbebenen liegen also keine Extrema vor, da die notwendige Bedingung verletzt ist.

Es gilt $f(x,y) = |x+y| \geq 0 \quad \text{und} \quad f(x,-x) = 0.$

Also nimmt f auf der Geraden $y = -x \ \Leftrightarrow \ x+y=0$ den global kleinsten Funktionswert an.

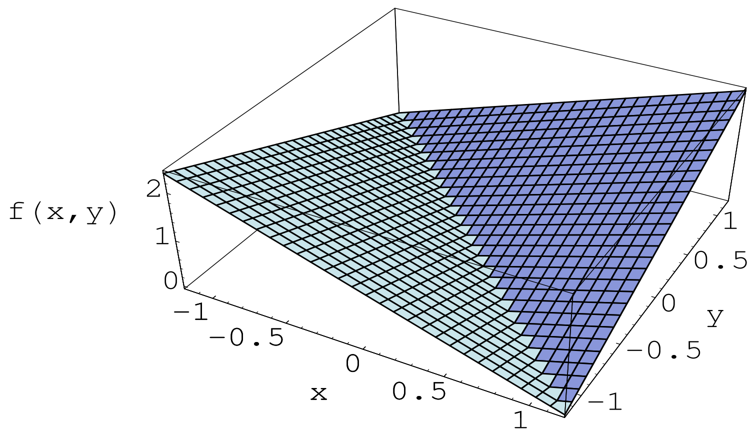


Bild 15 d): $f(x,y) = |x+y|$

Aufgabe 16:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2 \, .$$

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.
grad $f(x,y) = (4x(8x^2 - 5y), -10x^2 + 6y)^T = 0$

1.Fall: $\quad x = 0$
$\Rightarrow \; 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad$ stationärer Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

2.Fall: $\quad 8x^2 - 5y = 0$
$\Rightarrow \quad y = 8x^2/5 \; \Rightarrow \quad -10x^2 + 6 \cdot 8x^2/5 = 0 \; \Rightarrow \quad x = 0$

Einziger stationärer Punkt ist also $(0,0)$.

b) Man versuche die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

$$\boldsymbol{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 96x^2 - 20y & -20x \\ -20x & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{H} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ist positiv semidefinit, und das hinreichende Kriterium ist nicht anwendbar.

Die notwendige Bedingung II lässt für den stationären Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ noch die Möglichkeiten Minimum oder Sattelpunkt zu.

c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.

Auf der Geraden $x = 0$ wird die Funktion beschrieben durch

$$g(y) := f(0, y) = 3y^2.$$

Für $y = 0$ besitzt g ein striktes lokales Minimum.

Alle anderen Ursprungsgeraden können durch $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, und die Funktion wird dann durch

$$h(x) := f(x, ax) = 8x^4 - 10ax^3 + 3a^2x^2$$

beschrieben.

Für $a = 0$ wird h in $x = 0$ minimal.

Für $a \neq 0$ erhält man in $x = 0$ auch ein Minimum, denn es gilt

$$h'(x) = 32x^3 - 30ax^2 + 6a^2x \quad \Rightarrow \quad h'(0) = 0$$

und

$$h''(x) = 96x^2 - 60ax + 6a^2 \quad \Rightarrow \quad h''(0) = 6a^2 > 0\,.$$

d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

Auf der Parabel $y = ax^2$ hat die Funktion die Gestalt

$$\begin{aligned} p(x) := f(x, ax^2) &= 8x^4 - 10ax^4 + 3a^2x^4 \\ &= x^4(3a^2 - 10a + 8) = x^4(a-2)(3a-4). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcl} p'(x) &=& 4x^3(a-2)(3a-4) &\Rightarrow& p'(0) &=& 0 \\ p''(x) &=& 12x^2(a-2)(3a-4) &\Rightarrow& p''(0) &=& 0 \\ p'''(x) &=& 24x(a-2)(3a-4) &\Rightarrow& p'''(0) &=& 0 \\ p''''(x) &=& 24(a-2)(3a-4) &\Rightarrow& p''''(0) &=& 24(a-2)(3a-4)\,. \end{array}$$

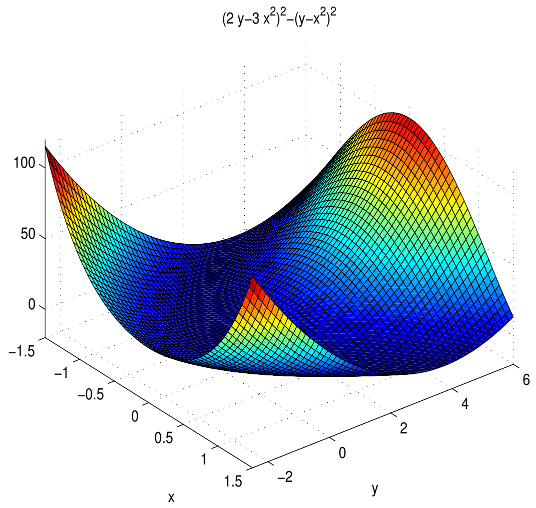
Für $a \in]4/3, 2[$ ist $p''''(0) < 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Maximum vor.

Für $a \notin [4/3, 2]$ ist $p''''(0) > 0$ und in $x = 0$ liegt ein striktes Minimum vor.

Bei dem stationären Punkt $(0, 0)$ handelt es sich also um einen Sattelpunkt.

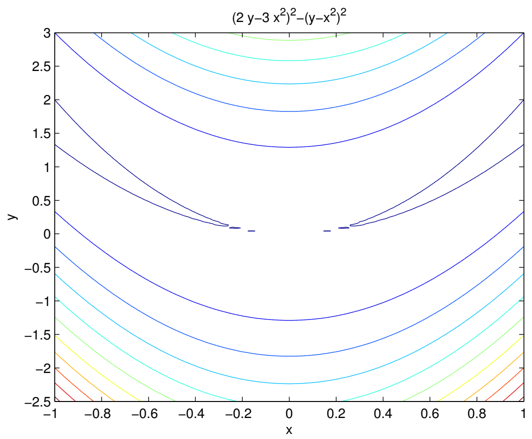
Hätte man gewusst, dass $f(x, y) = (2y - 3x^2)^2 - (y - x^2)^2$ gilt, hätte man auf der Ursprungsparabel $2y - 3x^2 = 0$ in $x = 0$ sofort ein Maximum und auf $y - x^2 = 0$ in $x = 0$ sofort ein Minimum erkannt und hätte dann sofort auf den Sattelpunkt schließen können.

e) Man zeichne die Funktion beispielweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.




```
ezsurf('8*x^4-10*x^2*y+3*y^2',[-1.5,1.5,-2.5,6])
```

Bild 16 a $f(x,y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$




```
ezcontour('8*x^4-10*x^2*y+3*y^2',[-1,1,-2.5,3])
```

Bild 16 b) $f(x,y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$