Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Hintereinanderausführung von Funktionen:

Gegeben sei eine Funktion $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

und eine Funktion $\boldsymbol{g} : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$.

Für $\boldsymbol{f}(D) \subset E$ wird die Hintereinanderausführung von $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ erklärt durch

$$\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^k\,, \quad (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\,.$$

Satz: (Kettenregel)

Ist $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0$ und $\boldsymbol{g}$ in $\boldsymbol{y}^0 := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$ total differenzierbar, so ist $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0$ total differenzierbar und es gilt

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\,.$$

Beispiel:

$$w: \ \mathbb{R}^2 \ \overset{\boldsymbol{\Phi}}{\to} \ \mathbb{R}^2 \ \overset{\tilde{w}}{\to} \ \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \mapsto \tilde{w}(u,v) = w(x,y)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}w &= (w_x, w_y) = \boldsymbol{J}(\tilde{w} \circ \boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{J}\tilde{w} \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{\Phi} = (\tilde{w}_u, \tilde{w}_v) \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{w}_u u_x + \tilde{w}_v v_x\,,\ \tilde{w}_u u_y + \tilde{w}_v v_y) \end{aligned}$$

Aufgabe 9:

Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a)
$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 & \stackrel{\boldsymbol{f}_1}{\to} & \mathbb{R}^2 & \stackrel{\boldsymbol{f}_2}{\to} & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} r = ye^x \\ s = x^3 \end{pmatrix} & \mapsto & r\cos(s^2)\,. \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{g}: \mathbb{R}^3 & \stackrel{\boldsymbol{g}_1}{\to} & \mathbb{R}^2 & \stackrel{\boldsymbol{g}_2}{\to} & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u = \sin(2yz) \\ v = x^2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2v-3u \\ e^{2u+v} \\ u^3 v \end{pmatrix}. \end{array}$$

Lösung:

a) Kettenregel:

$$\boldsymbol{Jf}_1(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Jf}_2(r,s) = \begin{pmatrix} \cos(s^2)\,, & -2rs\sin(s^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Jf}(x,y) &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}_2\circ\boldsymbol{f}_1)(x,y) = \boldsymbol{Jf}_2(\boldsymbol{f}_1(x,y))\cdot\boldsymbol{Jf}_1(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos((x^3)^2)\,, & -2ye^x x^3\sin((x^3)^2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ye^x & e^x \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ye^x\cos(x^6) - 6x^5ye^x\sin(x^6)\,, & e^x\cos(x^6) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

direkt: $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{f}_1(x,y)) = \boldsymbol{f}_2(r(x,y)), s(x,y)) = \boldsymbol{f}(x,y) = ye^x\cos(x^6)$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x\cos(x^6) - 6x^5ye^x\sin(x^6)\,, & e^x\cos(x^6) \end{pmatrix}$

b) Kettenregel:

$$\boldsymbol{Jg}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2z\cos(2yz) & 2y\cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Jg}_2(u,v) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2u+v} & e^{2u+v} \\ 3u^2v & u^3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(x,y,z) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{g}_2 \circ \boldsymbol{g}_1)(x,y,z) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x,y,z)) \cdot \boldsymbol{J}\boldsymbol{g}_1(x,y,z)$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2e^{2\sin(2yz)+x^2} & e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 3(\sin(2yz))^2x^2 & (\sin(2yz))^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2z\cos(2yz) & 2y\cos(2yz) \\ 2x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x & -6z\cos(2yz) & -6y\cos(2yz) \\ 2xe^{2\sin(2yz)+x^2} & 4z\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} & 4y\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 2x\sin^3(2yz) & 6x^2z\cos(2yz)\sin^2(2yz) & 6x^2y\cos(2yz)\sin^2(2yz) \end{pmatrix}$$

direkt:

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{g}_1(x,y,z)) = \boldsymbol{g}_2(u(x,y,z), v(x,y,z)) = \boldsymbol{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 3\sin(2yz) \\ e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ \sin^3(2yz) \cdot x^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 4x & -6z\cos(2yz) & -6y\cos(2yz) \\ 2xe^{2\sin(2yz)+x^2} & 4z\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} & 4y\cos(2yz)e^{2\sin(2yz)+x^2} \\ 2x\sin^3(2yz) & 6x^2z\cos(2yz)\sin^2(2yz) & 6x^2y\cos(2yz)\sin^2(2yz) \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung:

Gegeben sei eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen und ein Richtungsvektor $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0}$.

Die **Ableitung von f in $\boldsymbol{x}^0$ längs der Richtung $\boldsymbol{h}$** wird folgendermaßen definiert:

$$D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^0)}{t} \,.$$

Gilt $||\boldsymbol{h}|| = 1$, so gibt $D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0)$ den **Anstieg** von f an der Stelle $\boldsymbol{x}^0$ in Richtung $\boldsymbol{h}$ an.

Für $\boldsymbol{h} = (0, ..., 0, \overset{i.teK.}{1}, 0, ...0)$ gilt $D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0)$.

Ist f in $\boldsymbol{x}^0$ total differenzierbar, so kann die Richtungsableitung auch berechnet werden durch

$$D_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0) = \text{grad } f(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{h} \,.$$

Aufgabe 10:

Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Lösung:

Da f stetig partiell differenzierbar ist, ist sie auch total differenzierbar und die Richtungsableitung in (x_0, y_0) kann folgendermaßen berechnet werden:

$$D_{\boldsymbol{h}} f(x_0, y_0) = < \nabla f(x_0, y_0), \boldsymbol{h} > = (2x_0, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2x_0 h_1 + h_2$$

Die Gerade $2x + 7y = 3$ in Parameterform lautet:

$$\boldsymbol{g}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3/7 - 2x/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/7 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des Anstieges ist der in der Richtungsableitung verwendete Richtungsvektor $\boldsymbol{h}$ aus der Geradengleichung noch zu normieren:

$$\boldsymbol{h} = \pm \frac{7}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der An- bzw. Abstieg im Punkt $(x_0, y_0) = (2, -3)$ lautet daher

$$D_{\boldsymbol{h}} f(2, -3) = 4h_1 + h_2 = \pm \left(\frac{28}{\sqrt{53}} - \frac{2}{\sqrt{53}} \right) = \pm \frac{26}{\sqrt{53}} \,.$$

Koordinatentransformation:

Definition:

Gegeben seien die C^1-Funktion $\mathbf{\Phi}$ und $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit

$$\mathbf{\Phi} : U \to V \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, , \cdots, x_n)^T$ und $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, , \cdots, \Phi_n)^T$.

Die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}^0)$ sei regulär für jedes $\boldsymbol{x}^0 \in U$ und es existiere eine C^1-Umkehrfunktion $\mathbf{\Phi}^{-1} : V \to U$.

Dann wird $\boldsymbol{y} = \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})$ als **Koordinatentransformation** von den Koordinaten $\boldsymbol{x}$ auf die Koordinaten $\boldsymbol{y}$ bezeichnet.

a) **Polarkoordinaten:** $0 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r, \varphi) = r)$$

b) **Zylinderkoordinaten:**

$0 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad a \le z \le b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r, \varphi, z)) = r)$$

c) **Kugelkoordinaten:**

$0 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad \left(\Rightarrow \det(\boldsymbol{J}\mathbf{\Phi}(r, \varphi, \theta)) = r^2\cos\theta\right)$$

Aufgabe 11:

a) Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

mit $(x,y) \in Q := [-1,1] \times [-1,1]$.

(i) Man berechne $\boldsymbol{J\Phi}(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y))$ sowie

(ii) $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v)$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v))$.

(iii) Man zeichne Q und $\boldsymbol{\Phi}(Q)$.

b) Man zeichne den folgenden Körper und gebe die zugehörige Zylinderkoordinatendarstellung an

$$K = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 9 \le y^2+z^2 \le 25 \ \wedge\ 0 \le x \le 10 \ \wedge\ z \le 0\right\}.$$

Lösung:

a) (i)

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ist eine lineare Transformation, genauer sogar eine Drehstreckung um 45° mit dem Faktor $\sqrt{2}$, denn:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{J\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y)) = 2$$

(ii)

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u+v)/2 \\ (v-u)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{J\Phi})^{-1},$$

$\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)) = 1/2$

(iii)

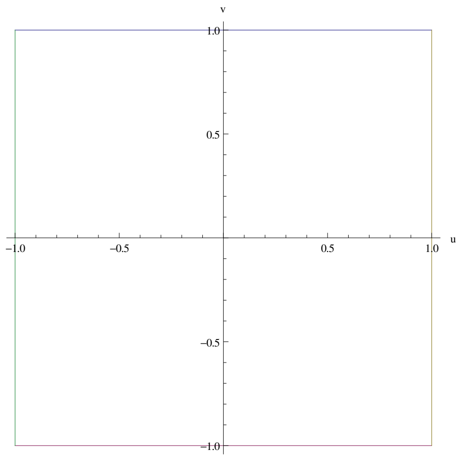

Bild 11.1: Q

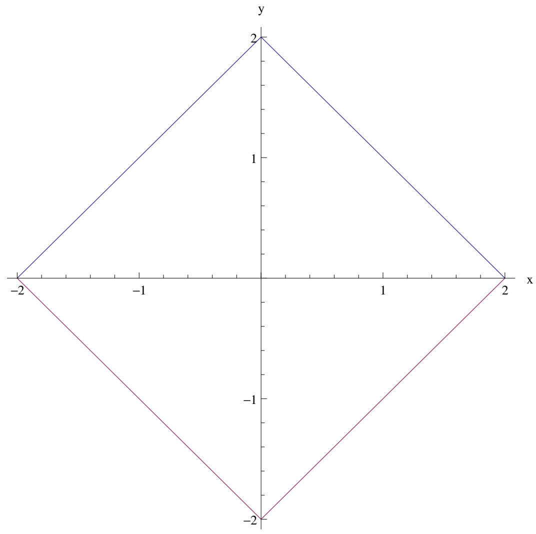

Bild 11.2: $\boldsymbol{\Phi}(Q)$

b) $9 \le y^2 + z^2 \le 25$
ist ein unbeschränkter Hohlzylinder um die x-Achse mit Radius $3 \le r \le 5$.

$0 \le x \le 10$ ergibt einen Hohlzylinder der Länge 10.

$z \le 0$ ergibt einen halben Hohlzylinder der Länge 10.

Die Zylinderkoordinaten lauten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(x, r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit $0 \le x \le 10, \quad 3 \le r \le 5$
und $\pi \le \varphi \le 2\pi$

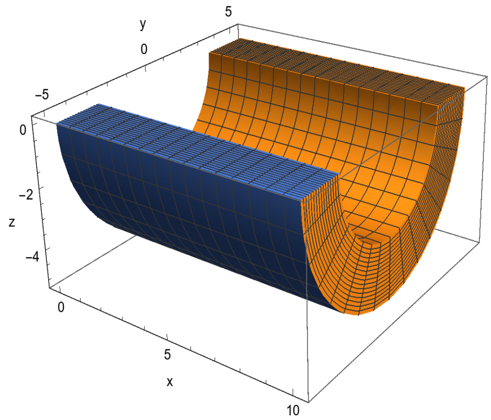

Bild 11.3: halber Hohlzylinder

Taylor-Polynom ersten Grades und Tangentialebene:

Die Linearisierung einer Funktion

$$f:\ D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x,y)$$

im Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (x_0, y_0) \in D$ erfolgt über das vollständige Differential und wird über das Taylor-Polynom ersten Grades berechnet:

$$T_1(x,y;x_0,y_0) = f(\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{J}f(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Das Taylor-Polynom T_1 gibt die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt (x_0, y_0) an.

Der Funktionsgraph von T_1 ist die Orts-, Richtungsvektordarstellung der Tangentialebene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ T_1(x,y;x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (x-x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (y-y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

a) Man berechne das Taylor-Polynom ersten Grades $T_1(x, y)$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

b) Man zeichne f und die Tangentialebene im Quadrat $[-3, 1] \times [-3, 1]$.

c) Man berechne den Abstand von f zu T_1 im Punkt $(1, 1)$.

Lösung:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (2x, 2y),\;\; (x_0, y_0) = (-1, -1)$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$
$$= 2 - 2(x + 1) - 2(y + 1)$$

b) MATLAB-Befehle für die Flächenplots:

```
>>ezgraph3('surf','x','y','x^2+y^2',[-3,1,-3,1])
>>hold
>>ezgraph3('surf','x','y','2-2*(x+1+y+1)',[-3,1,-3,1])
```

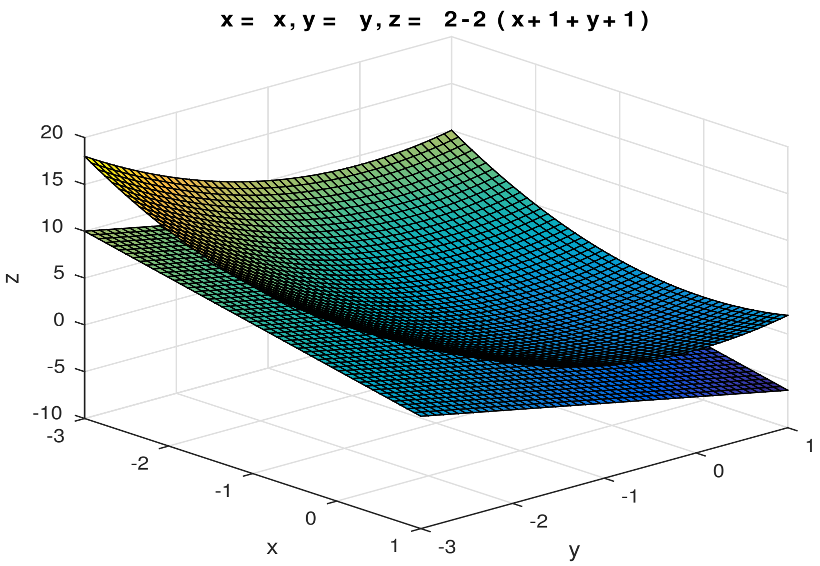

Bild 12: $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $T_1(x, y) = 2 - 2(x + 1) - 2(y + 1)$

c) $|f(1, 1) - T_1(1, 1)| = |2 - (2 - 2(1 + 1) - 2(1 + 1)| = 8$