Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Differentialoperatoren für reellwertige Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$$

Nabla-Operator ∇:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T \quad \text{mit} \quad \nabla f(\boldsymbol{x}) = (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x}))^T = (\text{grad} f(\boldsymbol{x}))^T$$

Laplace-Operator:

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{mit} \quad \Delta f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = < \nabla, \nabla f(\boldsymbol{x}) >$$

Beispiele für partielle Differentialgleichungen:

Wellengleichung:	$u_{tt} = \Delta u$
Wärmeleitungsgleichung:	$u_t = \Delta u$
Laplace-Gleichung:	$\Delta u = 0$

Dabei bezieht sich Δu nur auf die Ortsvariablen von u, für $n = 2$ bedeutet dies beispielsweise $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

Aufgabe 5:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion

$$u(x, y, t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$u(x, y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Lösung:

a) $u(x, y, t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

$u_t(x, y, t) = -5\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

$u_x(x, y, t) = \cos(x)\sin(2y)e^{-5t}$, $\quad u_y(x, y, t) = 2\sin(x)\cos(2y)e^{-5t}$

$u_{xx}(x, y, t) = -\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$, $\quad u_{yy}(x, y, t) = -4\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

Damit löst u die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

b) $u(x, y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$

$u_x(x, y) = n(\cos(nx) - 2\sin(nx))\sinh(ny)$,
$u_y(x, y) = n(\sin(nx) + 2\cos(nx))\cosh(ny)$

$u_{xx}(x, y) = -n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$,
$u_{yy}(x, y) = n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$

Damit löst u die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$.

Differentialoperatoren für vektorwertige Funktionen:

Divergenz für ein **Vektorfeld $\boldsymbol{f}$:**

$\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))^T$:

$$\text{div}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \nabla^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$$

Rechenregeln: für $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{div}(\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \ \text{div}\boldsymbol{f} + \beta \ \text{div}\boldsymbol{g} , \quad \text{div}(\varphi \boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi, \boldsymbol{f}) + \varphi \ \text{div}\boldsymbol{f}$$

Rotation für ein Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ im $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} , \quad \text{rot } \boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln: für $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{rot}(\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \ \text{rot}\boldsymbol{f} + \beta \ \text{rot}\boldsymbol{g} , \quad \text{rot}(\varphi \boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{f} + \varphi \ \text{rot}\boldsymbol{f}$$

Rotation für ein Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ im $\mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T$$

ergibt sich aus der 3-ten Komponente der Rotation der Einbettung

$$\tilde{\boldsymbol{g}}(x, y, z) = (u(x, y), v(x, y), 0)^T$$

des Vektorfeldes in den $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot } \tilde{\boldsymbol{g}}(x, y, z) = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T = (0, 0, v_x - u_y)^T$$

Also rot $\boldsymbol{g} := v_x - u_y$.

Stromlinien im $\mathbb{R}^2$ für das Vektorfeld

$\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)^T$ sind die Kurven $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$, deren Tangentialvektoren durch das Vektorfeld $\boldsymbol{g}$ gegeben sind, d.h.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

Wegen $\dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt} y(x(t)) = y'(x)\dot{x}(t)$ kann man auch alternativ die Differentialgleichung $y'(x) = \dfrac{v(x, y(x))}{u(x, y(x))}$ erfüllen.

Aufgabe 6:

a) Man berechne Divergenz und Rotation für die Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

(i) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$,

(ii) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$,

(iii) $\boldsymbol{h}(x,y,z) + \boldsymbol{u}(x,y,z)$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T = (x, -y)^T .$$

(i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

(ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1,1] \times [-1,1]$.

Lösung:

a) (i) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$

$\text{div}\boldsymbol{h} = h_{1x} + h_{2y} + h_{3z} = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{h} = (h_{3y} - h_{2z}, h_{1z} - h_{3x}, h_{2x} - h_{1y})^T = (2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)^T$

alternativ:

$$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \varphi(x,y,z)\boldsymbol{v} \;\text{ mit }\; \varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \;\text{ und }\; \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält
$\nabla\varphi = (2x, 2y, 2z)^T$, $\text{div}\boldsymbol{v} = 0$, $\text{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ und
$(\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = (2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)^T$.

Damit ergibt sich

$\text{div}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) + \varphi\ \text{div}\boldsymbol{v} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} + \varphi\ \text{rot}\boldsymbol{v} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = (2y-2z, 2z-2x, 2x-2y)^T$.

(ii) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$

$\text{div}\boldsymbol{u} = u_{1x} + u_{2y} + u_{3z} = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{u} = (u_{3y} - u_{2z}, u_{1z} - u_{3x}, u_{2x} - u_{1y})^T = (-2y+2z, -2z+2x, -2x+2y)$

(iii) $\text{div}(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{u}) = \text{div}\boldsymbol{h} + \text{div}\boldsymbol{u} = 2(2x+2y+2z)$

$\text{rot}(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{u}) = \text{rot}\boldsymbol{h} + \text{rot}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

alternativ:
$\boldsymbol{h}(x,y,z) + \boldsymbol{u}(x,y,z) = (2x^2, 2y^2, 2z^2)$

$\text{div}(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{u}) = (h_1+u_1)_x + (h_2+u_2)_y + (h_3+u_3)_z = 4x + 4y + 4z$

$\text{rot}(\boldsymbol{h}+\boldsymbol{u}) = (0-0, 0-0, 0-0)^T = \boldsymbol{0}$

b) (i) $\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T = (x, -y)^T$

div $\boldsymbol{g} = u_x + v_y = 1 - 1 = 0,\qquad$ rot $\boldsymbol{g} = v_x - u_y = 0 - 0 = 0$

(ii) Die MATLAB-Befehle für das Vektorfeld lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.2:1);
U=X.^1;
V=-Y.^1;
quiver(X,Y,U,V)
```

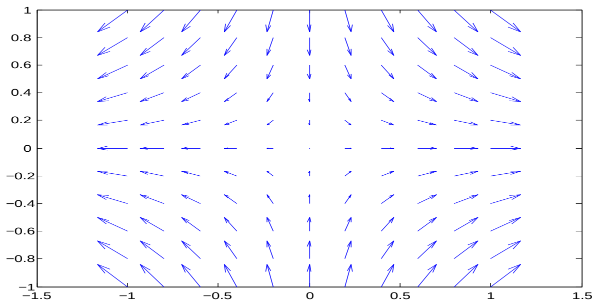

Bild 6 b) Vektorfeld $\boldsymbol{g}(x,y) = (x, -y)^T$

Stromlinien sind die Kurven $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$, deren Tangentialvektoren durch das Vektorfeld $\boldsymbol{g}$ gegeben sind

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{g}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t \\ be^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow e^t = \frac{x}{a} \Rightarrow \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{ab}{x} \end{pmatrix}$$

oder alternativ die Differentialgleichung $y'(x) = \dfrac{v(x, y(x))}{u(x, y(x))}$ erfüllen.

$$y'(x) = \frac{-y(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{c}{x}$$

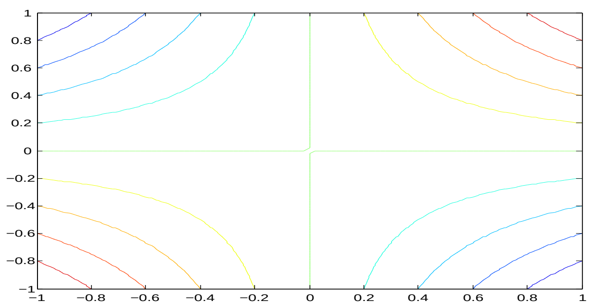

Bild 6 b) Stromlinien $\mathbf{c}(x) = (x, c/x)^T$, $c \in \mathbb{R}$, (Höhenlinien von $xy = c$)

Totale Differenzierbarkeit:

Gegeben sei die Funktion

$$\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

D offen, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, , \cdots, x_n)^T$ und $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, , \cdots, f_m)^T$.

Definition:

Eine Funktion $\boldsymbol{f}$ heißt in $\boldsymbol{x}^0 \in D$ **(vollständig,total) differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung $\boldsymbol{\ell}$ mit einer zugehörigen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(m,,n)}$ gibt, für die gilt

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0||} = \boldsymbol{0} \, .$$

$\boldsymbol{\ell}$ heißt das **(vollständige,totale) Differential** von $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0$ und wird mit $\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}^0)$ bezeichnet.

Die zugehörige Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt **Jacobi-** oder **Funktionalmatrix** und wird mit $\boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{Df}(\boldsymbol{x}^0)$ oder $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^0)$ bezeichnet.

Definition:

Existieren alle partiellen Ableitungen der Komponenten von $\boldsymbol{f}$ und sind stetig, so heißt $\boldsymbol{f}$ **stetig partiell differenzierbar** oder C^1**-Funktion** in D.

Satz:

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

a) Ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar in $\boldsymbol{x}^0$, so ist $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0$ stetig.

b) Ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar in $\boldsymbol{x}^0$, so gilt

$$\boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0) \end{pmatrix}$$

c) Ist $\boldsymbol{f}$ auf D stetig partiell differenzierbar, so ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar auf D.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

b) Man überprüfe, ob f stetig ist.

c) Man berechne $\boldsymbol{J}f(x,y)$.

d) Man überprüfe, ob f total differenzierbar ist.

Lösung:

a) MATLAB-Befehl für den Flächenplot:

```
ezsurf('2*x*y/sqrt(x^2+y^2)',[-1,1,-1,1])
```

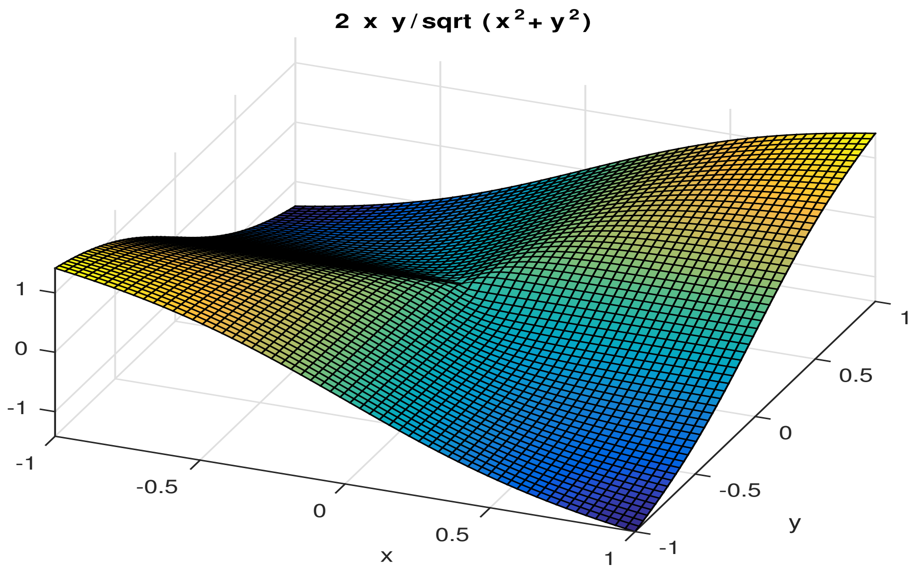

Bild 7: $\quad f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) Als Komposition stetiger Funktionen ist f für $(x,y) \neq (0,0)$ stetig.
Mit $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \;\Rightarrow\; 2xy \leq x^2 + y^2$ erhält man:

$$\begin{aligned}0 \;\leq\; & \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|2xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \leq\; & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0\,.\end{aligned}$$

Also gilt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Damit ist f in $\mathbb{R}^2$ stetig.

c) Die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ lautet für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\boldsymbol{J}f = \left(\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\,.$$

Für $(x,y) = (0,0)$ erhält man

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Analog berechnet man $f_y(0,0) = 0$.
Also gilt $\boldsymbol{J}f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$

d) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f eine C^1-Funktion und damit total differenzierbar.
Für $(x_0,y_0) = (0,0)$ und mit $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$ erhält man

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \boldsymbol{J}f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|} = \frac{\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\,.$$

Für die Nullfolgen $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ und $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ berechnet man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_ny_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2}{2/n^2} = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2\tilde{x}_n\tilde{y}_n}{\tilde{x}_n^2+\tilde{y}_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1/n^2} = 0\,.$$

Also existiert der folgende Grenzwert nicht

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \boldsymbol{J}f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|}\,.$$

Damit ist f in $(x,y) = (0,0)$ nicht total differenzierbar .

Jacobi-Matrix und vollständiges Differential:

Für die Abbildung $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, , \cdots, x_n)^T$ und $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, , \cdots, f_m)^T$ nennt man $\boldsymbol{Jf}$ die **Jacobi-Matrix** von $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{1,x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{1,x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m,x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{m,x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{grad} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \mathrm{grad} f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} .$$

Formale Schreibweise für das **vollständiges Differential** von $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)^T$

$$\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}^0) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0)dx_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)dx_n$$

mit den Differentialen der Koordinaten dx_1 , $\cdots$, dx_n.

Für $dx_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = x_1 - x_1^0$, $\cdots$, $dx_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = x_n - x_n^0$ berechnet man

$$\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)(x_n - x_n^0) = \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)$$

$\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)$ gibt näherungsweise die Funktionsabweichung von $\boldsymbol{f}$ beim Wechsel von $\boldsymbol{x}^0$ auf $\boldsymbol{x}$ an, also

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) \approx \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) .$$

Aufgabe 8:

a) Man berechne die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

   (i) $f(x, y) = \log(y) + \cos(xy)$ und $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$,

   (ii) $\boldsymbol{g}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$ und $t \in \mathbb{R}$,

   (iii) $\boldsymbol{h}(\varphi, \psi) = \boldsymbol{h}(2\cos\varphi\cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, 2\sin\psi)^T$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

   (iv) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (-3x + y, x - 3y + z, y - 3z)^T$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x, y) = (x + y + 1, x^2 - y - 1)^T$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

   Man bestimme $\boldsymbol{f}(0, 0)$ und berechne damit näherungsweise $\boldsymbol{f}(0.2, 0.1)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials. Anschließend berechne man $\boldsymbol{f}(0.2, 0.1)$ und ermittle den euklidischen Abstand zur Näherung.

Lösung:

a) (i) $f(x,y) = \log(y) + \cos(xy)$,

$$\boldsymbol{J}f(x,y) = (f_x, f_y) = \text{ grad}f(x,y) = \left(-y\sin(xy), \frac{1}{y} - x\sin(xy)\right)$$

(ii) $\boldsymbol{g}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$,

$$\boldsymbol{Jg}(t) = (g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t))^T = \boldsymbol{g}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)^T$$

(iii) $\boldsymbol{h}(\varphi,\psi) = \boldsymbol{h}(2\cos\varphi\cos\psi, 2\sin\varphi\cos\psi, 2\sin\psi)^T$,

$$\boldsymbol{Jh}(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} h_{1\varphi} & h_{1\psi} \\ h_{2\varphi} & h_{2\psi} \\ h_{3\varphi} & h_{3\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\varphi\cos\psi & -2\cos\varphi\sin\psi \\ 2\cos\varphi\cos\psi & -2\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & 2\cos\psi \end{pmatrix}$$

(iv) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (-3x+y, x-3y+z, y-3z)^T$, und $x,y,z \in \mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{Ju}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Für $\boldsymbol{f}(x,y) = (x+y+1, x^2-y-1)^T$ und $\boldsymbol{x}^0 = (x_0,y_0)^T = (0,0)^T$ erhält man $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{f}(0,0) = (1,-1)^T$.

Die Auswertung des vollständigen Differentials

$$\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}^0) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0)dx_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)dx_n$$

erfolgt durch $\boldsymbol{df}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$.

Für $\boldsymbol{x} = (0.2, 0.1)^T$ folgt $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0 = (0.2, 0.1)^T$.

$$\boldsymbol{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} f_{1,x}(x,y) & f_{1,y}(x,y) \\ f_{2,x}(x,y) & f_{2,y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Näherungsweise Berechnung von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ durch $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) + \boldsymbol{Jf}(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)$:

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{f}(0.2, 0.1) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Die exakte Auswertung:

$\boldsymbol{f}(0.2, 0.1) = (0.2 + 0.1 + 1, (0.2)^2 - 0.1 - 1)^T = (1.3, -1.06)^T$

Der Abstand zur Näherung:

$$||\boldsymbol{f}(0.2, 0.1) - \boldsymbol{f}(0,0)|| = \left|\left|\begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.06 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.3 \\ -1.1 \end{pmatrix}\right|\right| = 0.04$$