Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
Dr. K. Rothe

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

Fourier-Reihen

Definition:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) heißt **periodisch** mit der **Periode** $T > 0$, falls

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Das kleinste T heißt **Minimalperiode**.

Beispiel:

Das **trigonometrische Funktionssystem**

$$1\ ,\ \sin(kt)\ ,\ \cos(kt)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ besitzt die Minimalperiode $T = 2\pi$.

Bemerkungen:

a) Setzt man $t = \dfrac{T \cdot x}{2\pi} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot t}{T}$, so lässt sich eine T-periodische Funktion $f(t)$ in eine 2π-periodische Funktion $\tilde{f}(x)$ und umgekehrt umrechnen durch:

$$\tilde{f}(x) := f\left(\frac{T \cdot x}{2\pi}\right) \quad \text{bzw.} \quad f(t) := \tilde{f}\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) .$$

b) Für eine T-periodische und integrierbare Funktion $g(t)$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^T g(t)\, dt = \int_a^{a+T} g(t)\, dt .$$

Für $a = -T/2\,,\ \omega := \dfrac{2\pi}{T}$ und $g(t) = f(t)\cos(k\omega t)$ gilt z.B.

$$\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\,.$$

Definition:

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t)$ heißt **stückweise stetig** bzw.

stückweise stetig differenzierbar
(oder auch **stückweise glatt**),

falls f stetig bzw. stetig differenzierbar ist,

bis auf endlich viele Stellen $t_i \in [a,b]\,,\ i = 1,\ldots,n,$

an denen jedoch einseitige Grenzwerte $f(t_i+0)$ und $f(t_i-0)$ bzw. $f'(t_i+0)$ und $f'(t_i-0)$ existieren.

Definition:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) eine stückweise stetige T-periodische Funktion.

Mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ heißt

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

Fourier-Reihe von f.

Die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega t)\ dt\,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ b_k &= \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega t)\ dt\,, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

heißen **Fourierkoeffizienten** von f in Sinus-,Cosinus Darstellung.

komplexe Darstellung der Fourier-Reihe von f

Mit $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)$ und den Koeffizienten $\gamma_k \in \mathbb{C}$ erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-k} e^{-ik\omega t} \\ &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-k} (\cos(-k\omega t) + i\sin(-k\omega t)) \\ &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k + \gamma_{-k})\cos(k\omega t) + (i\gamma_k - i\gamma_{-k})\sin(k\omega t) \\ &= F_f(t) \end{aligned}$$

γ_k heißen **Fourierkoeffizienten** von f in Exponentialfunktionsdarstellung.

Es gelten folgende Umrechnungen und Beziehungen

a) (i) $a_0 = 2\gamma_0\,, \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}\,, \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})\,, \quad k \in \mathbb{N}$

(ii) $\gamma_0 = \dfrac{a_0}{2}\,, \quad \gamma_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}\,, \quad \gamma_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{N}$,

b) $\gamma_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int\limits_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt\,, \quad k \in \mathbb{Z}$.

c) Ist f reellwertig, dann sind a_k und b_k reell und es gilt $\gamma_k = \overline{\gamma_{-k}}$.

Konvergenzsatz:

Gegeben sei eine stückweise stetig differenzierbare und T-periodische Funktion f. Dann gilt:

a) Die Fourierreihe F_f konvergiert punktweise für alle $t \in \mathbb{R}$ mit

$$F_f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}\,.$$

b) Ist f stetig in $[a, b]$, dann konvergiert F_f dort gleichmäßig gegen f.

Eindeutigkeitssatz:

Gegeben seien zwei stückweise stetige und T-periodische Funktionen f und g mit den gleichen Fourierkoeffizienten.

Erfüllen f und g für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwerteigenschaft

$$f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \,,$$

dann sind f und g identisch.

Rechenregeln:

Für T-periodische und stückweise stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit den Fourier-Reihen

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \,, \quad F_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

gilt mit $\omega := \dfrac{2\pi}{T}$:

a) **Linearität** ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$):

$$\alpha F_f(t) + \beta F_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\gamma_k + \beta\delta_k) e^{ik\omega t}$$

b) **Verschiebung** ($a \in \mathbb{R}$):

$$F_f(t+a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k e^{ik\omega a}\right) e^{ik\omega t}$$

c) **Ableitung:** Ist f zusätzlich stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann ergibt sich die Fourier-Reihe von f' durch:

$$F_{f'}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\omega \left[b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ik\omega\gamma_k e^{ik\omega t}$$

T-Periodische Fortsetzungen:

Ist eine Funktion g nur auf dem Intervall $[0, T]$ oder $[0, T/2]$ durch $t \mapsto g(t)$ erklärt, so kann sie T-periodisch durch eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Folgende Fortsetzungsmöglichkeiten werden oft verwendet:

a) **Direkte Fortsetzung**

Gegeben $g : [0, T] \to \mathbb{R}$.

Die direkte T-periodische Fortsetzung wird durch folgende Funktionswertzuweisung festgelegt:

$$f(t) := g(t - nT) \quad \text{für} \quad nT \leq t < (n+1)T\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

b) Gegeben $g : [0, T/2] \to \mathbb{R}$.

(i) **Gerade Fortsetzung**

g wird für $t \in [-T/2, 0[$ durch $g(t) := g(-t)$ zunächst zu einer geraden Funktion erweitert.

(ii) **Ungerade Fortsetzung**

g wird für $t \in [-T/2, 0[$ durch $g(t) := -g(-t)$ zunächst zu einer ungeraden Funktion erweitert.

Die T-periodische Fortsetzung wird dann wie in a) durchgeführt durch

$$f(t) := g(t-nT) \quad \text{für} \quad \frac{(2n-1)T}{2} \leq t < \frac{(2n+1)T}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Satz:

Für eine stückweise stetige und T-periodische Funktion f gilt:

a) f gerade

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(t)\cos\left(k\omega t\right)\,dt, \quad b_k = 0, \quad \gamma_k = \gamma_{-k},$$

b) f ungerade

$$\Rightarrow \; a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(t)\sin\left(k\omega t\right)\,dt, \quad \gamma_k = -\gamma_{-k}.$$

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) \quad , & -2 \leq x \leq 0 \quad , \\ x(2-x) \quad , & 0 \leq x \leq 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion f

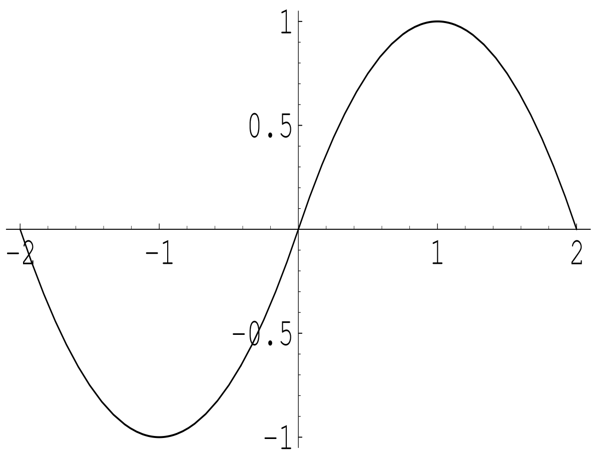

Bild 1 a) $f(x)$

b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f.

Da f ungerade ist

$0 \leq x \leq 2: \quad -f(x) = -x(2-x) = (-x)(2+(-x)) = f(-x)$,

gilt $a_k = 0$.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist

$T = 4 \Rightarrow \omega = 2\pi/T = \pi/2$

$$
\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx = \int_0^2 x(2-x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -\frac{2x(2-x)}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 2(1-x)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= 2(1-x)\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\int_0^2 2\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -2\left(\frac{2}{k\pi}\right)^3\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \begin{cases} 4\left(\dfrac{2}{k\pi}\right)^3 & k = 2n-1 \\ 0 & k = 2n \end{cases}
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$
F_f(x) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) .
$$

c) Man zeichne $S_m(x)$ und die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

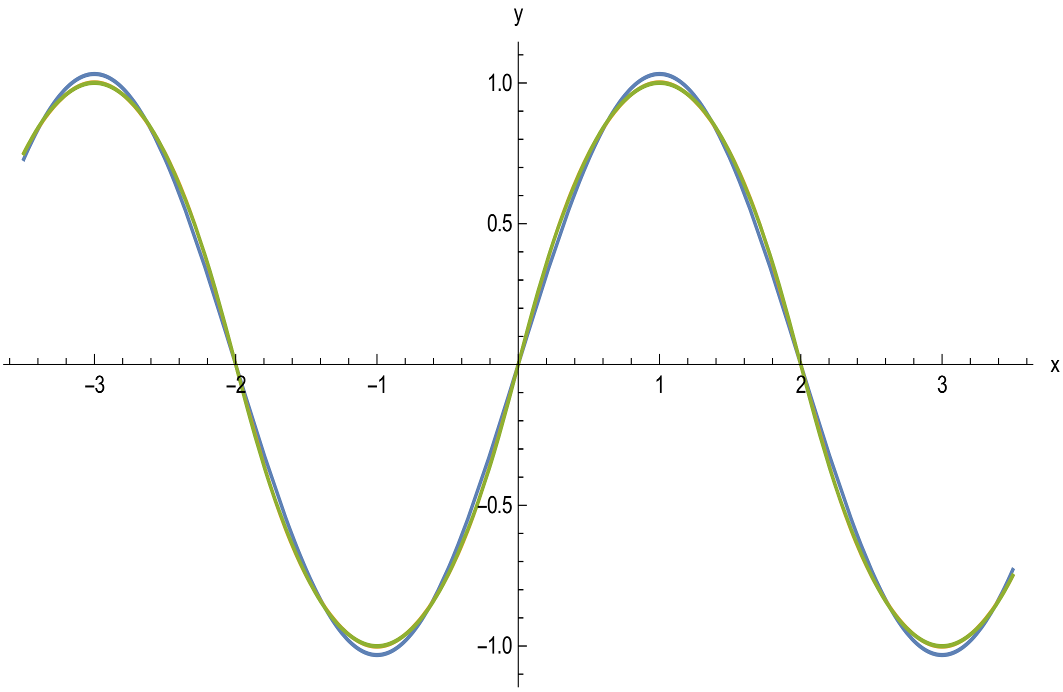

Bild 1 c) (i) $S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

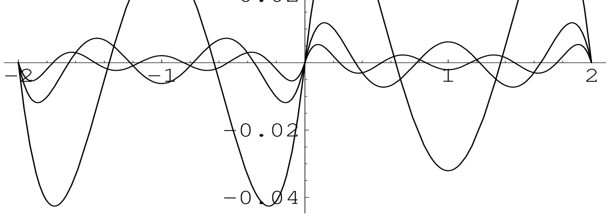

Bild 1 c) (ii) $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\,.$$

Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 1$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f.

Es gilt also

$$1 = f(1) = F_f(1) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}\,.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x \quad , & -\pi \le x \le 0 \quad , \\ \quad 0 \quad , & \quad 0 \le x \le \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die direkte Fortsetung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.

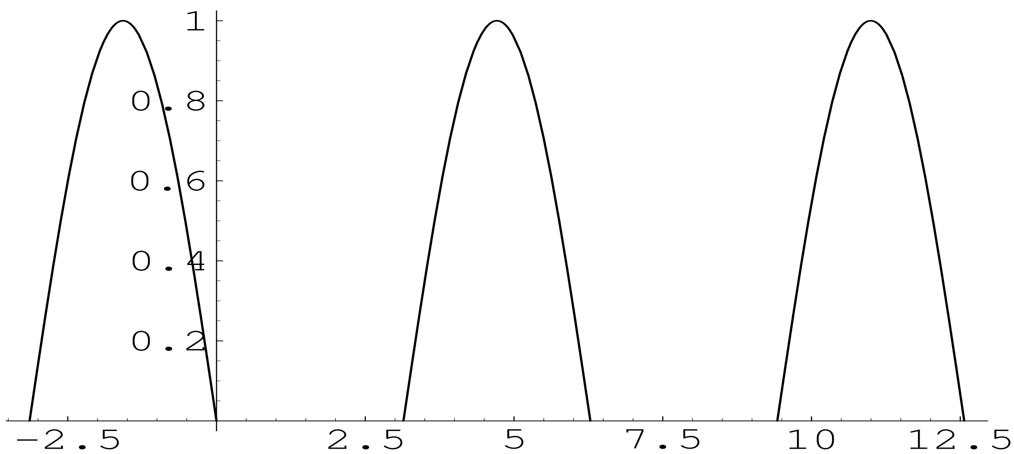

Bild 2 a) 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist

$$T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 1.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\cos x\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x\cos(kx)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin x\sin(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\cos x\sin(kx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(\frac{-\cos x\cos(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos(kx)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left(-1-\cos(k\pi)\right) + \frac{a_k}{k^2}
\end{aligned}$$

Über a_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$$a_{k\geq 2} \;=\; -\frac{1+(-1)^k}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} 0 & k = 2n-1 \quad \text{(ungerade)} \\ -\dfrac{2}{\pi(k-1)(k+1)} & k = 2n \qquad \text{(gerade)} \end{cases}$$

$$a_1 \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} -\sin x\cos x\,dx \;=\; -\frac{1}{2\pi}\left(\sin^2 x\right)\Big|_{-\pi}^{0} \;=\; 0$$

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} \;&=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} -\sin x\sin(kx)\,dx \\
&=\; -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin x\cos(kx)}{k}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int\limits_{-\pi}^{0}\cos x\cos(kx)\,dx\right) \\
&=\; -\frac{1}{k\pi}\left(\frac{\cos x\sin(kx)}{k}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin x\sin(kx)\,dx\right) \;=\; \frac{b_k}{k^2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow b_{k\geq 2} = 0$, über b_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$$b_1 \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} -\sin x\sin x\,dx \;=\; -\frac{1}{2\pi}\left(x - \sin x\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{0} \;=\; -\frac{1}{2}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2nx)$$

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

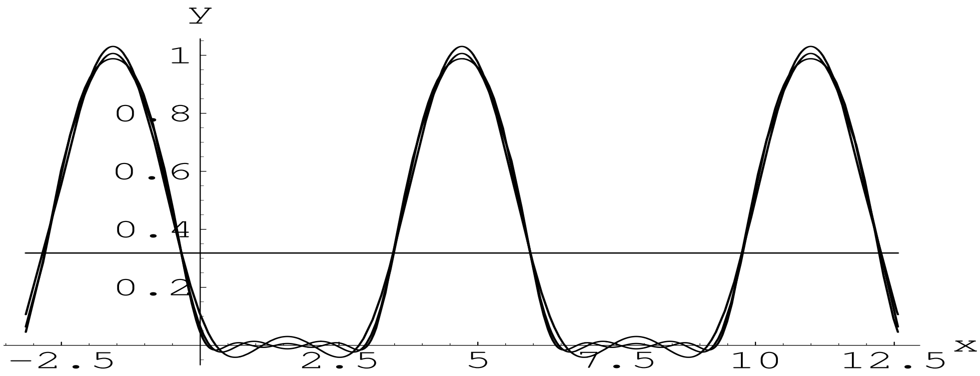

Bild 2 c): Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f.

Es gilt also

$$0 = f(0) = F_f(0) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Funktionen in mehreren Variablen

Definition:

Eine reellwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, heißt in $\boldsymbol{x}^0 := (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ **partiell differenzierbar nach** x_i, falls folgender Grenzwert existiert:

$$
\begin{aligned}
f_{x_i}(\boldsymbol{x}^0) &:= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}^0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} .
\end{aligned}
$$

f heißt **partiell differenzierbar**, falls in jedem Punkt von D alle partiellen Ableitungen existieren.

Sind diese auch noch stetig so heißt f **stetig partiell differenzierbar** oder auch C^1**-Funktion**.

Gradient: $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)\right)$

Höhere Ableitungen:

werden wie in $\mathbb{R}$ rekursiv definiert, z.B.:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Höhenlinien: (Spezialfall einer Niveaumenge im $\mathbb{R}^n$) Linien, auf denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konstant ist, also die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c \text{ für } c \in \mathbb{R}\}.$$

Im 'Satz über implizite Funktionen' wird geklärt, wann sich eine Funktion hinter dieser Forderung verbirgt.

Bei einer Parametrisierbarkeit durch x wäre $y(x)$ die Funktion und es würde $f(x, y(x)) = konst$ gelten.

Der Funktionsgraph von $y :]a, b[\to \mathbb{R}$ wird im $\mathbb{R}^2$ durch die Kurve $\mathbf{c}(x) = (x, y(x))^T$ beschrieben.

Der zugehörige Tangentialvektor lautet $\mathbf{c}'(x) = (1, y'(x))^T$.

Funktionsgraph von $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
('Fläche' im $\mathbb{R}^3$)

$$\text{graph}(f) := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \; , \; z = f(x, y) \right\}$$

Tangentialebene:

Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Als Parameterform kann der Funktionsgraph gewählt werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + (y - y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind.

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad} f(x, y) = (10x, -6y)^T$

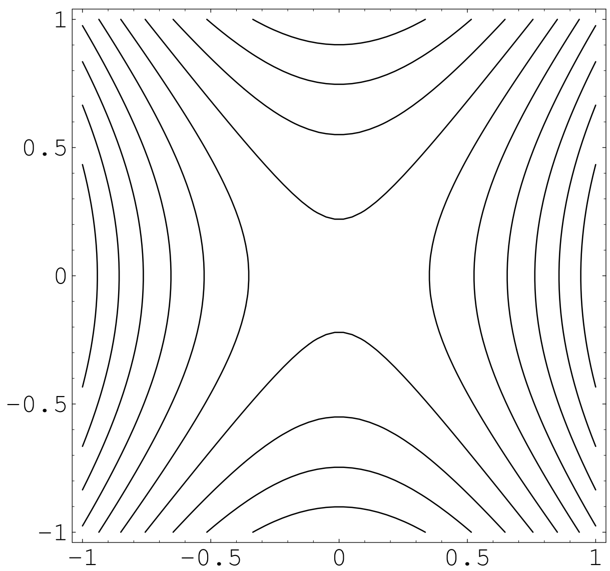

Bild 3 a) $5x^2 - 3y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x, y) = 5x + 3y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x, y) = (5, 3)^T$

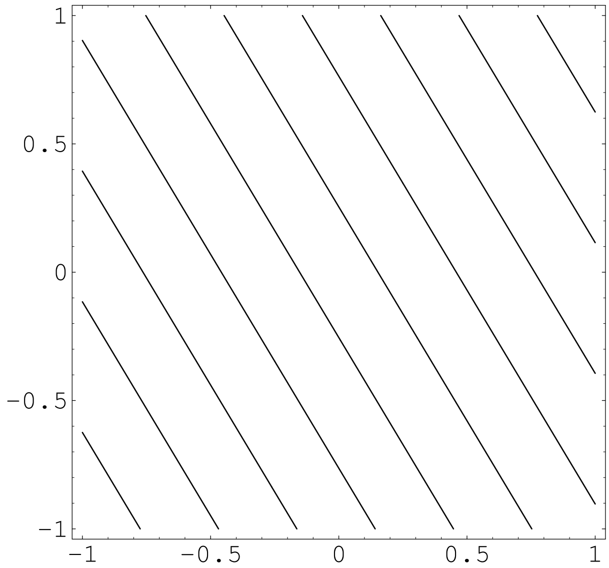

Bild 3 b) $5x + 3y = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

c) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (10x, 6y)^T$

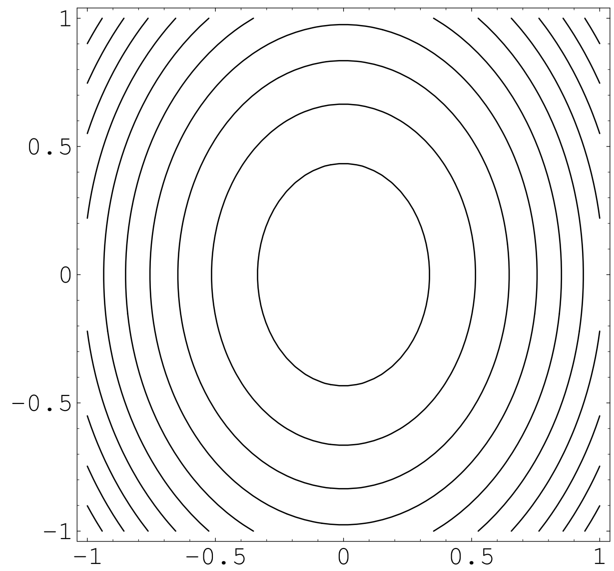

Bild 3 c) $5x^2 + 3y^2 = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

d) $f(x,y) = \sin(6x) + 2y \quad \Rightarrow$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (6\cos(6x), 2)^T$$

Ein MATLAB-Befehl für den Höhenlinienplot lautet:

```
ezcontour('sin(6*x)+2*y',[-1,1,-1,1])
```

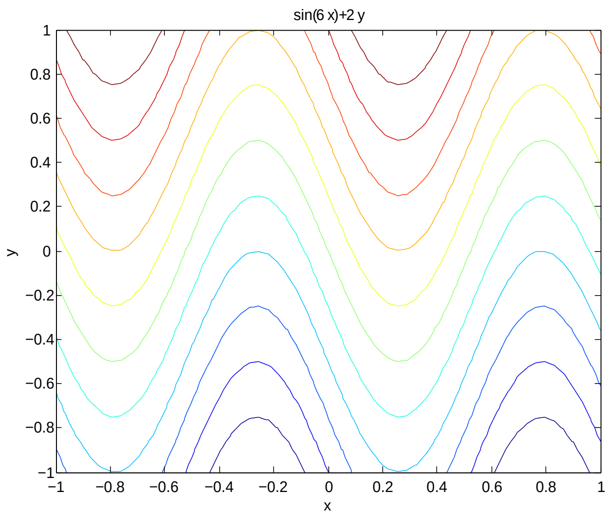

Bild 3 d) $\sin(6x) + 2y = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - 4y$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

$$f(x,y) = x^2 - 4y\ , \quad f_x(x,y) = 2x\ , \quad f_y(x,y) = -4\ ,$$

$$f_{xx}(x,y) = 2\ , \quad f_{xy}(x,y) = 0\ , \quad f_{yy}(x,y) = 0\ ,$$

$$f_{xxx}(x,y) = 0\ , \quad f_{xxy}(x,y) = 0\ ,$$

$$f_{xyy}(x,y) = 0\ , \quad f_{yyy}(x,y) = 0$$

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-4, 4] \times [-2, 2]$.

Ein MATLAB-Befehl für den Flächenplot lautet:

```
ezsurf('x^2-4*y',[-4,4,-2,2])
```

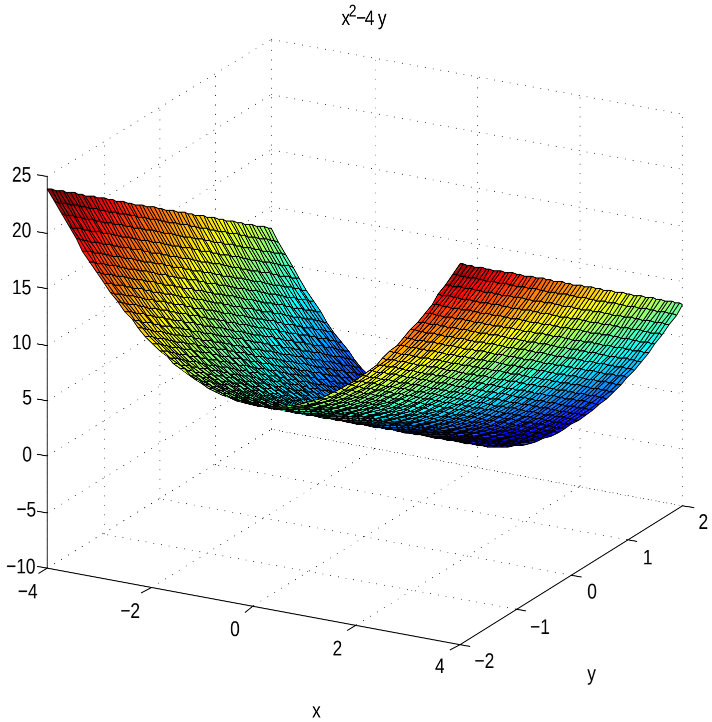

Bild 4 $f(x, y) = x^2 - 4y$

c) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

$$f(x,y) = x^2 - 4y \;, \quad f_x(x,y) = 2x \;, \quad f_y(x,y) = -4 \;,$$

$$f(2,0) = 2^2 - 4 \cdot 0 = 4 \;, \quad f_x(2,0) = 4 \;, \quad f_y(2,0) = -4$$

Tangentialebene:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Tangentialebene : $\quad z = 4 + 4(x-2) - 4y$

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(2,0)$ läuft.

Es ist $f(2,0) = 4$.

Damit wird die Höhenlinie im Punkt $(2,0)$ beschrieben durch die implizite Gleichung

$$4 = f(x, y(x)) = x^2 - 4y(x)\ .$$

Man erhält durch Auflösen $y(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$. Eine die Höhenlinie parametrisierende Kurve ist daher gegeben durch

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x^2}{4} - 1 \end{pmatrix}\ .$$

e) Man berechne den Winkel α zwischen grad$f(2,0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(2,0)$.

$$\mathrm{grad} f(2,0) = (f_x(2,0), f_y(2,0))^T = (4,-4)^T$$

Tangentialrichtung der Höhenlinie

$$\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{x}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}'(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{grad} f(2,0)^T \cdot \mathbf{c}'(2)}{||\mathrm{grad} f(2,0)||_2 \cdot \ ||\mathbf{c}'(2)||_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$