

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

Tipp: Nutzen Sie in b) die Symmetrien des Definitionsbereiches und der Funktion.

a)

$$\int \int_{D_1} xy^2 d(x, y), \quad \text{mit } D_1 = [-1, 3] \times [1, 2].$$

b)

$$\int_{D_2} 1 d(x, y) \quad \text{mit } D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq |1 - \sqrt{|x|}| \right\}$$

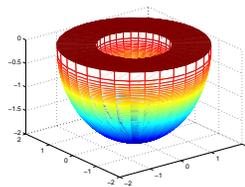
c)

$$\int_{D_3} y d(x, y) \quad \text{mit } D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0 \right\}.$$

Aufgabe 2) Hinweis: $2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta)$.

a) Gegeben ist das mit einer Flüssigkeit gefüllte Gefäß

$$D := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \leq 0\}.$$



In der Flüssigkeit befinden sich schwebende Teilchen eines Stoffes S . Die Dichte des Stoffes S beträgt

$$\rho(x, y, z) = -z.$$

Berechnen Sie die Masse des Stoffes S in D .

b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{f}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ z^2 \end{pmatrix}$ durch die Oberfläche

der Achtelkugel

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y, z \geq 0 \right\}.$$