Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2018/19**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben sei $f(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0$.

a) (i) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $f(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0)^T := (2,-2)^T$ nach y aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(x)$ mit $g(2) = -2$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$f(x,y) = 0 \iff y = g(x).$$

(ii) Berechnen Sie das Taylor Polynom ersten Grades der Funktion g aus Teil a) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Lösungsmenge von

$$f(x,y,z) := (x^2 - 2e^{xy})z + 2 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P_0 := (x_0,y_0,z_0)^T := (0,1,1)^T$ nach x aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(y,z)$ mit $g(1,1) = 0$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0, y_0, z_0 folgende Äquivalenz gilt

$$f(x,y,z) = 0 \iff x = g(y,z).$$

Nach welcher(n) anderen Variablen kann nach dem Satz über implizite Funktionen aufgelöst werden?

Aufgabe 2: Gesucht seien die Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 2\ln\left(\frac{x}{y}\right) + x + 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$h(x,y) = x\,y - 1 = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$ ein zulässiger, stationärer Punkt der Lagrange–Funktion $L = f - \mu h$ ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $\boldsymbol{H_x} L(x_0,y_0;\mu)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum ker $Dh(x_0,y_0)$.

Abgabetermine: 17.–21.12.18