Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani WIiSe 18/19
28.01.2019

Klausurberatung Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Das ins Netz gestellte Material zur Klausurberatung soll nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig.

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Absolut notwendige Werkzeuge:

- Sicheres partielles ableiten,
- $\nabla f = \mathrm{grad}\, f =$ Vektor der ersten Ableitungen,
- $\nabla^2 \boldsymbol{f} = H\boldsymbol{f} =$ Matrix der zweiten Ableitungen,
- Verlauf und Ableitung elementarer Funktionen
- Eigenwerte berechnen, bzw. deren Vorzeichen,
- **rot** $\boldsymbol{f}$, div $\boldsymbol{f}$, Rotation, Divergenz,
- Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Jacobi-Matrix
- einfache Integration

4 Punkte extra

Top 6 der letzten Klausuren

- **Kurvenintegrale**
  - Rotation berechnen
  - Potential berechnen $\longrightarrow$ Kurvenintegal über Potential (Hauptsatz)
  - Kurvenintegral direkt berechnen

  Passende Aufgaben: Blätter 6

- **Bereichsintegrale**
  - direkt berechnen
  - Transformationssatz (Polar–, Zylinder–, Kugelkoordinaten)
  - Volumen, Masse

  Passende Aufgaben: Blätter 7, P1, P2a, H1, H2

- **Taylor-Polynom mit Fehlerabschätzung**

  Passende Aufgaben: Blatt 3: P2, Blätter 4: P1, H1b, H2

- **Min/Max ohne Nebenbedingung**

  - Kandidaten: $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$
  - Klassifikation: Eigenwerte Hessematrix Hf

  Passende Aufgaben: Blätter 4: P2,H1a, H2a

- **Min/Max mit Nebenbedingung**
  - Zulässigkeit, Regularitätsbedingung
  - Lagrangefunktion L aufstellen
  - Stationäre Punkte: $\operatorname{grad} L = 0$
  - Hessematrix $\boldsymbol{H}\, L$ berechnen
  - Definitheit der Hessematrix prüfen.
  - Eventuell Tangentialraum berechnen, Definitheit der Hessematrix darauf testen.

  Passende Aufgaben: Blätter 5: P1, P2, H2

- **Oberflächenintegrale**
  - Parametrisierung
  - Fluss, Satz von Gauß

  Passende Aufgaben: Blätter 7-P2, (B7-H2)

- **Blatt 1:**
  P1:Begriffe: beschränkt, abgeschlossen, konvex etc.
  P2: Höhenlinien skizzieren

Werkzeug

WZ

Verständnis/Vorstellung

√

- **Blätter 2:**
  P1a: Gradienten berechnen WZ
  P1 b-d: Höhenlinien zeichnen, Vermutung Höhenlinie senkrecht auf Gradient
  P2: Gradienten berechnen WZ

  H1: grad und Hesse matrix berechenen WZ
  Tangentialebene = Taylor 1.ten Grades
  H2: Zeige gegebene Fkt löst Wellengleichung etc. ∅ WZ

- **Blätter 3:**

  - Aufgabe B3- P1: Jacobi-Matrizen und deren Determinanten WZ
  - Aufgabe B3- P2: Taylor 2. Grades, $\mathbb{R}^2$ ohne Fehlerabschätzung xxx

    in Klausur: mit

  - Aufgabe B3-1H: Niveau-Flächen, Richtungsableitungen V

  - Aufgabe B3-2H: Definition/Berechnung von Rotation/Divergez

    WZ

- **Blätter 4:**

  - Aufgabe B4-P1, Taylor 2. Grades, $\mathbb{R}^2$ über Standardansatz mit Fehlerabschätzung xxx

  - Aufgabe B4-P2: Min/Max ohne Nebenbedingung xx

  - Aufgabe B4- H1a: Min/Max ohne Nebenbedingung xx

  - Aufgabe B4- H1b: Taylor-Polynom 3. Grades ohne Fehlerabschätzung
    Klausur: eher 2. mit! xxx

  - Aufgabe B4- H2
    Teile a, b: Min/Max auf Rechteck kombiniert mit Taylor 2. Grades xxx
    + Fehlerabschätzung

    Teil c: $\underbrace{\text{min von f mit Hilfe von min von } T_2}_{\emptyset}$

gute Übung
in Klausur würden
wir eher in zwei
getrennten Aufgaben
nach Taylor bzw.
Min/Max fragen!

- **Blätter 5:**

  – Aufgabe B5-P1: Min/Max unter Nebenbedingung im $\mathbb{R}^2$, × × ×
  Kandidaten unbekannt,
  Klassifikation über Kompaktheit oder global definite Hesse-Matrix

  – Aufgabe B5-P2: Min/Max unter Nebenbedingung im $\mathbb{R}^3$.
  Kandidat gegeben × × ×
  Hesse global definit

  – Aufgabe B5-H1: Satz über implizite Funktionen $\emptyset$
  – Aufgabe B5-H2: Min/Max unter Nebenbedingung im $\mathbb{R}^2$.
  Kandidat gegeben.
  Hesse auf Tangentialraum prüfen × × ×

- **Blatt 6:**

  xxx

  – Aufgabe B6-P1, a: Rotation berechnen, $\underbrace{\text{Potential berechnen}}_{\text{keine komplizierten Integrale}}$ falls möglich

  – Aufgabe B6-P2: Kurvenintegral direkt bzw. über Potential berechnen xxx
  geschlossene Wege

  $\oint f = 0$ falls $f = \nabla \phi$

  – Aufgabe B6-H1: Arbeitsintegral/Kraftfeld xxx

  – Aufgabe B6-1Hb: Kurvenintegral direkt bzw. über Potential berechnen xxx

  – Aufgabe B6-2H: Rotation, Potential, Kurvenintegral direkt und über Potential xxx

  f: zu aufwendig für Klausur

  g: okay

- **Blatt 7:**

  - Aufgabe B7-P1: Bereichsintegral,kartesisch und Polarkoordinaten
  - Aufgabe B7-P2: Bereichsintegral, Oberflächenintegral, Gauß, Zylinderkoordinaten,
  - Aufgabe B7-H1a: Bereichsintegral, $\mathbb{R}^2$ kartesisch
  - Aufgabe B7-H1b: Bereichsintegral, Symmetrien nutzen $\emptyset$
  - Aufgabe B7-H1c: Bereichsintegral, S~~ymmetrien nutzen, Beträge~~ Polarkoordinaten
  - Aufgabe B7-2Ha: Bereichsintegral, Kugelkoordinaten, Masse
  - Aufgabe B7-2Hb: Fluss mit Gauß und Kugelkordinaten (kein Oberflächenintegralnötig)

Beispiel zu Gauß: Zylinderkoordinaten: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$ | $\varphi \in [0, 2\pi]$, $0 \leq r \leq z$

Gegeben sei der Körper $K := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} \leq z^2 \,,\, \underline{0 \leq z \leq 2} \}$

und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (\underbrace{x^2 y}_{f_1}, \underbrace{-xy^2}_{f_2}, \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{f_3})^{\mathsf{T}}$.

a) Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_K \mathrm{div} \boldsymbol{f} \, d\boldsymbol{x}$.

$$(f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z = \underbrace{2xy - x \cdot 2y}_{0} + 2z = 2z$$

b) K wird berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein nicht ebenes Flächenstück M. Geben Sie Parametrisierungen der beiden Flächenstücke an.

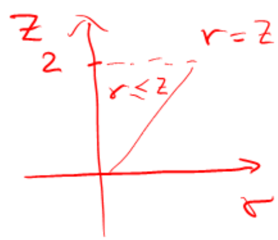
c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das ebene Flächenstück D.

d) Wie groß ist nach den Teilen a) und c) der Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das nicht ebene Flächenstück M?

a) $$\int_K \mathrm{div}\, f = \int_0^2 \int_0^z \int_0^{2\pi} \underbrace{\mathrm{div}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)}_{2z} \cdot \underbrace{r}_{\det(J\phi)} \cdot \, d\varphi \, dr \, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^z \Big(2z \cdot r \cdot \underbrace{\varphi \Big|_0^{2\pi}}_{2\pi} \Big) \, dr \, dz$$

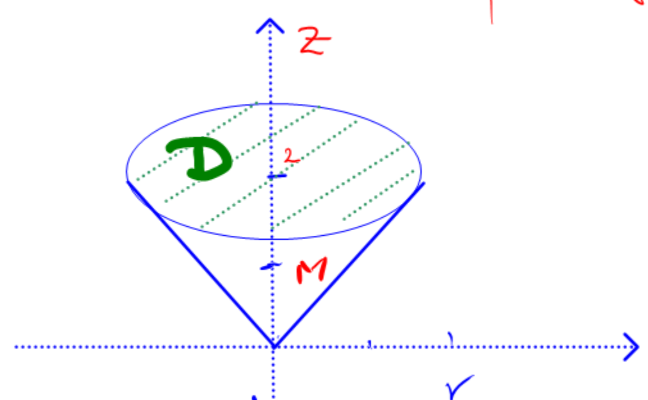
$$= \pi \int_0^2 \int_0^z 2z \cdot \underbrace{2r \, dr}_{r^2 \big|_0^z} \, dz = \pi \int_0^2 2z \left(z^2 - 0^2 \right) dz = \pi \frac{z^4}{2} \Big|_0^2 = 8\pi$$



b) D: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = 2 \end{array}\right\}$ $P_1(r, \varphi)$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$z \in [0, 2]$

$0 \leq r \leq z$



M: r maximal bei festem z

also $r = z$, Kreis um z-Achse

für festes z: $x = r\cos(\varphi) = z\cos(\varphi)$, $y = z\sin(\varphi)$

$$P_2(z, \varphi) = \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}$$

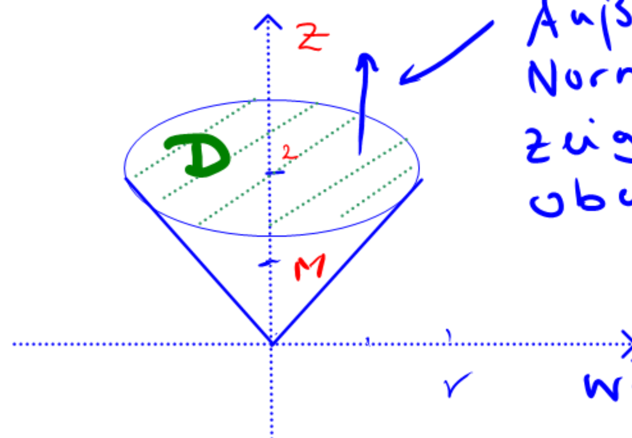
c) Fluss durch D

$$F_1 = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left\langle f(p_1(r,\varphi)),\ \frac{\partial p_1}{\partial r} \times \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} \right\rangle d\varphi\, dr$$

? muss nach Außen weisen

$$\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial p_1}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} \times \frac{\partial p_1}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} \times \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$



Äußere Normale zeigt nach oben also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ wählen!

$$\left\langle f(p_1(r,\varphi)),\ \frac{\partial p_1}{\partial r} \times \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} f_1(\dots) \\ f_2 \ \dots \\ \underbrace{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}_{r^2} + 2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle$$

$x^2+y^2+z^2$ auf D

$$f_3(p_1(r,\varphi)) =$$

$$= (r^2+4)\,r = r^3 + 4r \longrightarrow F_1 = \int_0^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} (r^3+4r)\, d\varphi}_{(r^3+4r)\varphi\big|_0^{2\pi}}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^2 (r^3+4r)\, dr = 2\pi\left(\frac{2^4}{4} + 2\cdot 2^2\right) = 2\pi(4+8) = 24\pi$$

d) Nach Gauß: Fluss durch M = Gesamtfluss − F_1 $= \iiint \operatorname{div} f(\dots) \dots - F_1 = 8\pi - 24\pi = -16\pi$