

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Flächensektorformel für Kurven im \mathbb{R}^2 :

Gegeben sei die Parameterdarstellung der Kurve \mathbf{c}

$$\begin{aligned} \mathbf{c} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiele:

- a) **Funktionsgraph** einer Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [a, b]$$

- b) **Polarkoordinaten**

$$\mathbf{c}(\varphi) = r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

Der Flächeninhalt F der vom Ortsvektor der Kurve \mathbf{c} überstrichenen Fläche berechnet sich in kartesischen Koordinaten durch die **Flächensektorformel**

$$F = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) dt .$$

Für Polarkoordinaten gilt

$$F = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Denn der für die Flächenberechnung verwendete Integrand besitzt in Polarkoordinaten die Gestalt:

$$\begin{aligned} & x(\varphi)y'(\varphi) - x'(\varphi)y(\varphi) \\ &= r(\varphi) \cos \varphi (\dot{r}(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi) - (\dot{r}(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi) r(\varphi) \sin \varphi \\ &= r(\varphi) \dot{r}(\varphi) (\cos \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) + r^2(\varphi) (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2(\varphi) \end{aligned}$$

Aufgabe 25:

- a) Man zeichne das cartesische Blatt $\mathbf{c} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{t^3 + 1} \\ \frac{t^2}{t^3 + 1} \end{pmatrix}$$

und berechne den Flächeninhalt der im 1. Quadranten umschlossenen Fläche.

- b) Die Kurve \mathbf{c} sei in Polarkoordinaten mit $r(\varphi) = e^\varphi$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$ gegeben. Man berechne die von \mathbf{c} überstrichene Fläche und zeichne die Kurve.

Lösung:

- a) Polstelle der Komponenten $x(t)$ und $y(t)$ bei $t = -1$.

1. Quadrant: $t \in [0, \infty[; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{c}(t) = \mathbf{0}$

2. Quadrant: $t \in]-1, 0]; \quad \mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$

4. Quadrant: $t \in]-\infty, -1[; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{c}(t) = \mathbf{0}$

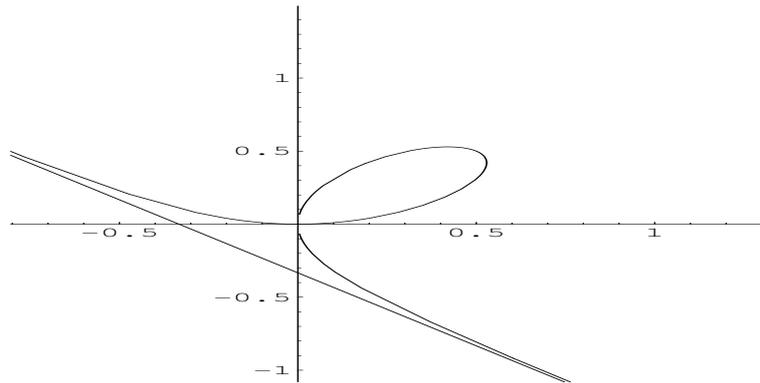


Bild 25 a): cartesisches Blatt

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ tx(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t^3+1} \\ \frac{t^2}{t^3+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) + t\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) = x(t)(x(t) + t\dot{x}(t)) - \dot{x}(t)tx(t) = x^2(t)$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{c}) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{t^3+1} \right)^2 dt \quad \text{Subst. } u = t^3 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+u)^2} \frac{du}{3t^2} = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{6(1+u)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

b)

$$F(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{2\varphi} d\varphi = \frac{e^{2\varphi}}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}$$

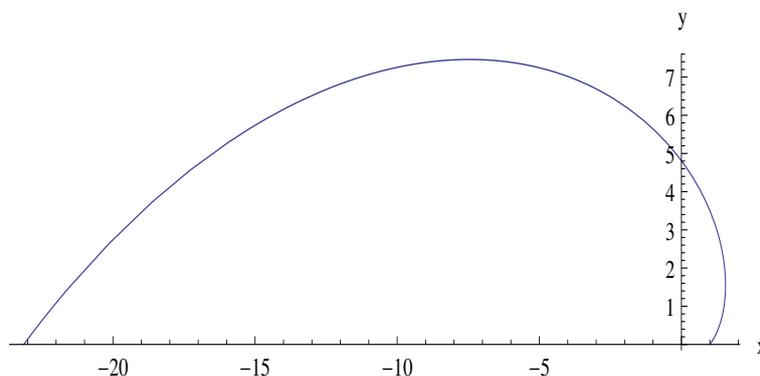


Bild 25 b): Kurve \mathbf{c} für $0 \leq \varphi \leq \pi$

Flächen im \mathbb{R}^3 :

Beispiel: Flächenstücke $F \subset \mathbb{R}^3$

- a) **Funktionsgraph** einer Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y)^T \mapsto f(x, y)$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G \right\}$$

- b) **implizite Darstellung** durch $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z)$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0 \right\}$$

Definitionen

Gegeben seien ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und eine C^1 -Abbildung

$$\mathbf{p} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

Sind die Vektoren $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u}$ und $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial v}$ linear unabhängig für alle $\mathbf{u} \in G$, dann heißt

- a) $F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \in G\} = \mathbf{p}(G)$ **Fläche** bzw. **Flächenstück** im \mathbb{R}^3 .

- b) \mathbf{p} **Parametrisierung** von F ,

- c) G **Parameterbereich** von F bzgl. \mathbf{p} ,

- d) $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial u}$ und $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial v}$ **Tangentenvektoren** an F im Punkt $\mathbf{p}(\mathbf{u}^0)$

- e) $\mathbf{T}_F(\lambda, \mu) = \mathbf{p}(\mathbf{u}^0) + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial v}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Tangentialebene an F im Punkt $\mathbf{p}(\mathbf{u}^0)$,

- f) $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u}^0)}{\partial v}$ **Normalenvektor** an F im Punkt $\mathbf{p}(\mathbf{u}^0)$,

$$\text{g) } \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) := \frac{\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial v} \right\|} \quad \text{Normaleneinheitsvektor an } F,$$

$$\text{h) } d\mathbf{o} := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \right\| d\mathbf{u} \quad \text{Oberflächenelement und}$$

$$\text{i) } \int_{\mathbf{p}(G)} d\mathbf{o} := \int_G \left\| \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial v} \right\| d\mathbf{u} \quad \text{Flächeninhalt von } \mathbf{p}(G).$$

Oberflächenintegrale:

Für die Fläche F mit der Parametrisierung \mathbf{p} , d.h. $F = \mathbf{p}(G)$, werden folgende Oberflächenintegrale definiert:

a) **Oberflächenintegral 1. Art** für die stetige Funktion $f : F \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_F f(\mathbf{x}) d\mathbf{o} := \int_G f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \left\| \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial v} \right\| d\mathbf{u}.$$

b) **Oberflächenintegral 2. Art** für das stetige Vektorfeld $\mathbf{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{o} &:= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{o} \\ &= \int_G \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \right\| d\mathbf{u} \\ &= \int_G \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial v} \right\rangle d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Bemerkung:

Stellt das Vektorfeld \mathbf{f} das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung einer Flüssigkeit dar, so kann das Oberflächenintegral $\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{o}$ als **Fluss** von \mathbf{f} durch die Fläche F interpretiert werden, gemessen in Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit in Richtung der verwendeten Normalen.

Koordinatentransformationen:

Gegeben seien zwei Gebiete $D, K \subset \mathbb{R}^n$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$\Phi : D \rightarrow K, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$$

mit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in D$ und $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K$. Wenn Φ auf D injektiv ist und $\det(\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u})) \neq 0$ für alle $\mathbf{u} \in D$ gilt, dann heißt Φ **Koordinatentransformation**.

a) **Polarkoordinaten:** $0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r, \varphi)) = r)$$

b) **Zylinderkoordinaten:**

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad a \leq z \leq b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r, \varphi, z)) = r)$$

c) **Kugelkoordinaten:**

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow \det(\mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \theta)) = r^2 \cos \theta)$$

Transformationssatz:

Für stetige Funktionen $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_K f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(\Phi(\mathbf{u})) \cdot |\det(\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}))| \, d\mathbf{u}$$

Dabei ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\int_D 1 \, d\mathbf{x}$ existiert, $K = \Phi(D)$ und die Koordinatentransformation Φ muss auf D^0 invertierbar sein.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Teilfläche eines Zylinders

$$Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z, x^2 + z^2 = 9\} .$$

- Man gebe eine Parametrisierung von Z an,
- zeichne Z mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezgraph3' und
- berechne den Flächeninhalt von Z mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Lösung:

- Die Fläche Z kann über Zylinderkoordinaten parametrisiert werden

$$\mathbf{p} : \underbrace{[0, 2] \times [0, \pi]}_{=D} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}(y, \varphi) = (3 \cos \varphi, y, 3 \sin \varphi)^T .$$

- Für die Zeichnung mit MATLAB verwenden wir die Parametrisierung \mathbf{p}

$$\text{ezgraph3('surf', '3*cos(t)', 'y', '3*sin(t)', [0,pi,0,2])}$$

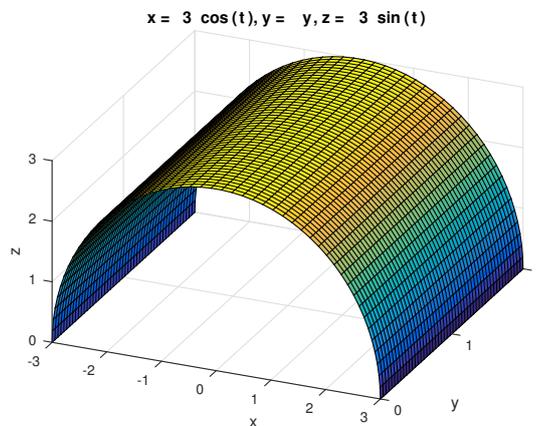


Bild 26: halber Zylinder Z

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 \sin \varphi & 0 & 3 \cos \varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi \\ 0 \\ 3 \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \int_Z do &= \int_D \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \right\| d(y, \varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^\pi \sqrt{9 \cos^2 \varphi + 9 \sin^2 \varphi} d\varphi dy \\ &= 3 \int_0^2 \int_0^\pi d\varphi dy = 3 \int_0^2 dy \int_0^\pi d\varphi = 6\pi \end{aligned}$$

Stokescher Integralsatz:

Gegeben sei ein C^1 -Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ und eine Fläche $F \subset D$ mit der Parametrisierung \mathbf{p} auf dem Parameterbereich G , d.h. $F = \mathbf{p}(G)$. Dann gilt:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\sigma = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

Dabei muss die Parametrisierung \mathbf{c} der Randkurve von ∂G so durchgeführt werden, dass $\mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{c}(t))) \times \frac{d}{dt} \mathbf{p}(\mathbf{c}(t))$ in Richtung der Fläche F zeigt, d.h. die Fläche muss sich beim Durchlaufen von ∂F mit der Parametrisierung $\mathbf{p}(\mathbf{c}(t))$ und der nach 'oben weisenden' Flächennormalen \mathbf{n} links befinden.

Bemerkung:

Der Satz von Stokes kann als Erweiterung des Greenschen Integralsatzes in der Ebene auf Flächenstücke im Raum aufgefasst werden.

Stellt das Vektorfeld \mathbf{f} das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung einer Flüssigkeit dar, so wird mit dem Kurvenintegral $\oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ die **Zirkulation** von \mathbf{f} längs des Randes von F gemessen. Ist das geschlossen Kurvenintegral gleich Null, so ist \mathbf{f} **wirbelfrei**. Dies ist für $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ der Fall.

Aufgabe 27:

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(x, y, z) = (-y^2, yz, x)^T$ einer Strömung sowie die Fläche

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad z = xy \right\}.$$

- Man zeichne die Fläche S mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezmesh' oder 'ezmeshc'.
- Man berechne auf S das Integral über alle Wirbelstärken $\int_S \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o}$.
- Man berechne die Zirkulation $\oint_{\partial S} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ von \mathbf{u} längs der Randkurve ∂S von S und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3 .

Lösung:

- Verwendet man für den Parameterbereich von S Polarkoordinaten, dann parametrisiert $\mathbf{q} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{q}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2 \cos \varphi \sin \varphi)^T$ die Sattelfläche. Die Plotbefehle in MATLAB lauten

```
f1 = @(r,t) r.*cos(t.^1);
f2 = @(r,t) r.*sin(t.^1);
f3 = @(r,t) r.*cos(t.^1)*r.*sin(t.^1);
ezmeshc(f1,f2,f3,[0,1,0,2*pi])
```

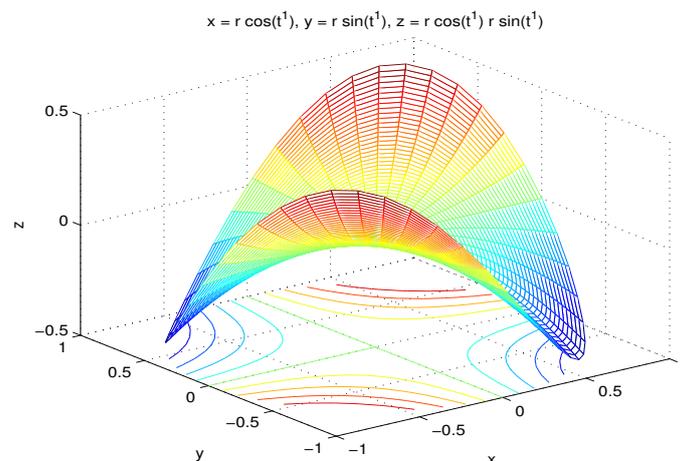


Bild 27): Sattelfläche S mit 'ezmeshc', ('ezmesh' ohne Höhenlinien)

- Die Fläche S kann auch in folgender Weise durch \mathbf{p} parametrisiert werden:

$$\mathbf{p} : K \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}(u, v) = (u, v, uv)^T$$

und $K := \{(u, v)^T \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y^2 \\ yz \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 - y \\ 0 - 1 \\ 0 - (-2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -1 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Mit Polarkoordinaten $(u, v)^T = \Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $\det(\mathbf{J}\Phi) = r$ erhält man mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} & \int_S \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} \\ &= \int_S \left\langle \begin{pmatrix} -v \\ -1 \\ 2v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d(u, v) = \int_S v^2 + u + 2v \, d(u, v) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \varphi + r \cos \varphi + 2r \sin \varphi) \cdot r \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \\ &= \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \right) \left(\frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

c) Eine Parametrisierung von ∂S erhält man durch $\mathbf{c}(\varphi) := \mathbf{q}(1, \varphi)$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{c} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \varphi \sin \varphi)^T. \\ &\Rightarrow \dot{\mathbf{c}}(\varphi) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^T \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Additionstheoreme

$$2 \cos \varphi \sin \varphi = \sin(2\varphi) \quad \text{und} \quad \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

erhält man

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin^2 \varphi \\ \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + \left(\frac{\sin(2\varphi)}{2} \right)^2 + \cos \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{16} (2\varphi - \sin(2\varphi) \cos(2\varphi)) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Satz von Stokes: $\int_S \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o} = \frac{\pi}{4} = \oint_{\partial S} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$

Normalbereiche im \mathbb{R}^3 :

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ wird als **Normalbereich** bezeichnet, falls stetige Funktionen φ_1, φ_2 und ξ_1, ξ_2 existieren, so dass D die folgende Darstellung besitzt

$$D = \{ (x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \xi_1(x, y) \leq z \leq \xi_2(x, y) \} .$$

Analog zum \mathbb{R}^2 können im \mathbb{R}^3 in der Darstellung x, y und z vertauscht sein.

Volumenintegrale:

Satz: (Volumenintegral über Normalbereiche)

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige (beschränkte) Funktion auf einer Normalbereichsdarstellung von D , dann gilt

$$\int_D f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\xi_1(x)}^{\xi_2(x)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx .$$

Masse eines Körpers K :

Gegeben sei ein Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit der nichtnegativen stetigen Massendichtefunktion $\rho : K \rightarrow \mathbb{R}$. Die **Masse** M des Körpers K berechnet sich durch

$$M = \int_K \rho(x, y, z) d(x, y, z) .$$

Gaußscher Integralsatz:

Für das C^1 -Vektorfeld $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ und die kompakte, messbare und durch Normalbereiche darstellbare Menge $S \subset G$, deren Rand ∂S aus endlich vielen glatten Flächenstücken besteht, gilt:

$$\int_S \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \oint_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{o} .$$

Dabei muss bei der Berechnung des Oberflächenintegrals der geschlossenen Fläche ∂S , deshalb wird die Schreibweise $\oint_{\partial S}$ verwendet, der Normalenvektor $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\partial v}$ bzgl. S nach außen zeigen.

Bemerkung:

Stellt das Vektorfeld \mathbf{f} das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung einer Flüssigkeit dar, so kann das Oberflächenintegral $\oint_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{o}$ als Flussbilanz durch das Volumens S interpretiert werden. Für $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ in S gilt nach dem Gaußschen Integralsatz $\oint_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{o} = 0$, es fließt also aus S soviel heraus, wie hineinfließt. Die Divergenz wird daher auch als **Quellendichte** von \mathbf{f} bezeichnet.

Aufgabe 28:

a) Durch $x^2 + y^2 \leq 4$ und $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ wird ein Rotationsparaboloid P mit konstanter Dichte ρ beschrieben. Man zeichne P unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3' und berechne seine Masse.

b) Gegeben seien der Körper

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x \leq 0\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (y, -x, z^3)^T.$$

(i) Man skizziere K .

(ii) Der Rand von K ist beschreibbar durch ein ebenes Flächenstück S und ein nicht ebenes Flächenstück H .

Man gebe jeweils Parametrisierungen für die beiden Randflächenstücke S und H an.

(iii) Man berechne jeweils den Fluss von \mathbf{f} durch die beiden Randflächenstücke S und H .

(iv) Man berechne das Volumenintegral $\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z)$.

Lösung:

a) Für die Zeichnung kann P über Zylinderkoordinaten dargestellt werden, mit dem Normalbereich $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 4 - r^2$ und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z), \quad \det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi, z) = r$$

Der MATLAB-Plotbefehl für die Oberfläche des Rotationsparaboloids lautet

`ezgraph3('surf', 'r*cos(t)', 'r*sin(t)', '4-r^2', [0,2,0,2*pi])`

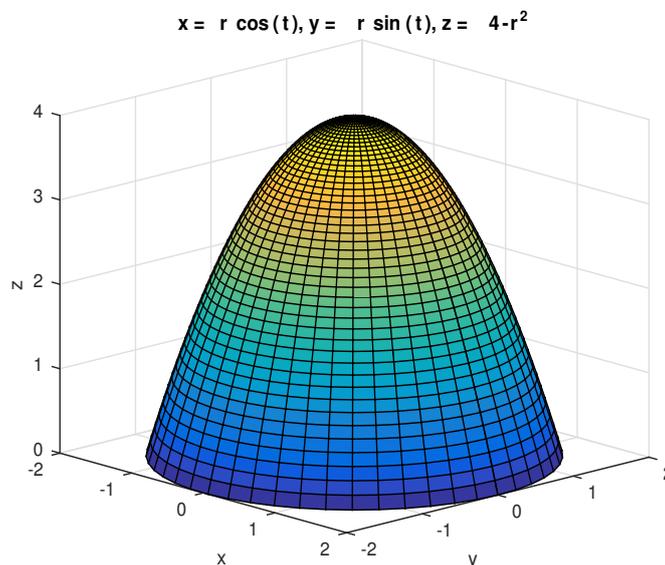


Bild 28 a): Rotationsparaboloid P .

Berechnung der Masse M in Zylinderkoordinaten unter Verwendung des Transformationsatzes mit konstanter Dichte ρ :

$$\begin{aligned} M &= \int_P \rho d(x, y, z) = \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} r dz d\varphi dr = \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} r z \Big|_0^{4-r^2} d\varphi dr \\ &= \rho \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(4-r^2) d\varphi dr = \rho \int_0^2 r(4-r^2) \varphi \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi\rho \int_0^2 r(4-r^2) dr = 8\pi\rho \end{aligned}$$

b) (i)

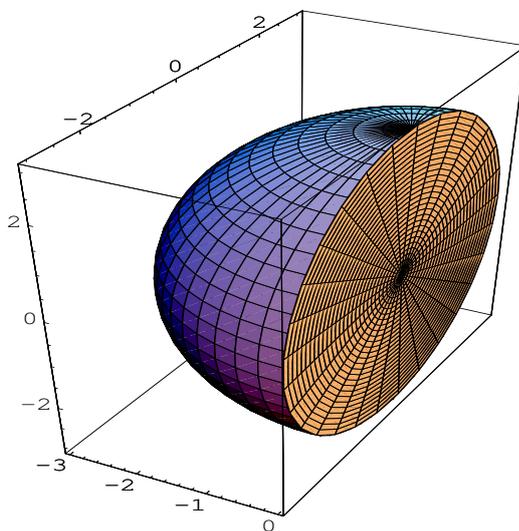


Bild 28 b): Halbkugel K

(ii) Parametrisierung der Kreisseite S : $\mathbf{p} : [0, 3] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der Halbkugelfläche H :

$\mathbf{q} : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{q}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi \cos \psi \\ 3 \sin \varphi \cos \psi \\ 3 \sin \psi \end{pmatrix}$$

(iii) Fluss durch S , mit der äußeren Normalen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \int_S \mathbf{f} do &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ 0 \\ r^3 \sin^3 \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2 \cos \varphi d\varphi dr = 0 \end{aligned}$$

Fluss durch H , mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \psi} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -3 \sin \varphi \cos \psi & 3 \cos \varphi \cos \psi & 0 \\ -3 \cos \varphi \sin \psi & -3 \sin \varphi \sin \psi & 3 \cos \psi \end{vmatrix} = 9 \cos \psi \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

$$\int_H \mathbf{f} \, d\mathbf{o} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9 \cos \psi \left\langle \begin{pmatrix} 3 \sin \varphi \cos \psi \\ -3 \cos \varphi \cos \psi \\ 27 \sin^3 \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \right\rangle d\psi d\varphi$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 243 \cos \psi \sin^4 \psi d\psi d\varphi = 243\pi \left. \frac{\sin^5 \psi}{5} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{486\pi}{5}$$

(iv) Mit dem Gaußschen-Integralsatz erhält man:

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f} \, d(x, y, z) = \int_S \mathbf{f} \, d\mathbf{o} + \int_H \mathbf{f} \, d\mathbf{o} = \frac{486\pi}{5}$$

Alternativ: direkte Berechnung über Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} & \int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ &= \int_K 3z^2 \, d(x, y, z) = \int_0^3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3r^2 \sin^2 \psi \cdot r^2 \cos \psi \, d\psi d\varphi dr \\ &= \int_0^3 r^4 dr \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos \psi \sin^2 \psi \, d\psi = \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^3 \varphi \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^3 \psi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{486\pi}{5} \end{aligned}$$