Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Dr. K. Rothe

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Extremalprobleme mit Gleichungsnebenbedingungen:

Gesucht sind die Extremwerte einer C^1-Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf der folgenden Teilmenge (Menge der **zulässigen Punkte**) des Definitionsbereiches

$$G := \{\boldsymbol{x} \in D \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \ \subset \ D\,.$$

mit einer C^1-Funktion $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$ und $m < n$, d.h. die Extremalwerte müssen zusätzlich noch die m Gleichungen $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))^T = \boldsymbol{0}$ erfüllen.

Satz: (Lagrange-Multiplikatoren-Regel)

Sei $\boldsymbol{x}^0 \in D$ ein lokales Extremum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$, das die **Regularitätsbedingung**

$$\text{Rang } \boldsymbol{Jg}(\boldsymbol{x}^0) = m$$

erfüllt. Dann gibt es **Lagrange-Multiplikatoren** $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so dass mit der **Lagrange-Funktion**

$$F(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$$

in $\boldsymbol{x}^0$ die **notwendige Bedingung erster Ordnung** gilt:

$$\text{grad}F(\boldsymbol{x}^0) = \text{grad}f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \text{grad}g_i(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}\,.$$

Satz: (hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)

Gilt Rang $\boldsymbol{Jg}(\boldsymbol{x}^0) = m$ für $\boldsymbol{x}^0 \in G$ und $\text{grad}F(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$ und ist $\boldsymbol{H}F(\boldsymbol{x}^0)$ positiv definit auf

$$TG(\boldsymbol{x}^0) := \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle \text{grad}g_i(\boldsymbol{x}^0), \boldsymbol{y} \right\rangle = 0\right\}\ ,$$

d.h. gilt $\boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{H}F(\boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{y} > 0$ für $\boldsymbol{y} \in TG(\boldsymbol{x}^0) \backslash \{\boldsymbol{0}\}$, dann besitzt f in $\boldsymbol{x}^0$ ein strenges lokales Minimum unter der Nebenbedingung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

Aufgabe 17:

Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über eine Parametrisierung $\mathbf{c}$ des Kreises und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Lösung:

Unter der Nebenbedingung $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ sollen die Extremalpunkte der Funktion $f(x,y) = x + y$ bestimmt werden.

a) Regularitätsbedingung:

grad $g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

Da $g(0,0) = -1$ gilt, $(0,0)$ also nicht auf dem Kreis liegt, erfüllen alle zulässigen Punkte ($g(x,y) = 0$) die Regularitätsbedingung

$$\text{Rang}(\boldsymbol{J}g(x,y)) = 1.$$

Lagrange-Funktion: $F(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda x \\ 1 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit y und die zweite mit x und subtrahiert beide, so erhält man $x - y = 0 \;\Rightarrow\; x = y$.

Aus der dritten Gleichung ergibt sich dann $x^2 + x^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Extremalkandidaten:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Menge $g(x,y) = 0$ einen Kreis beschreibt, ist sie kompakt. Damit nimmt die stetige Funktion f auf $g(x,y) = 0$ Maximum und Minimum an. Es ist $f(P_1) = \sqrt{2}$ und $f(P_2) = -\sqrt{2}$. Also ist P_1 Maximum und P_2 Minimum.

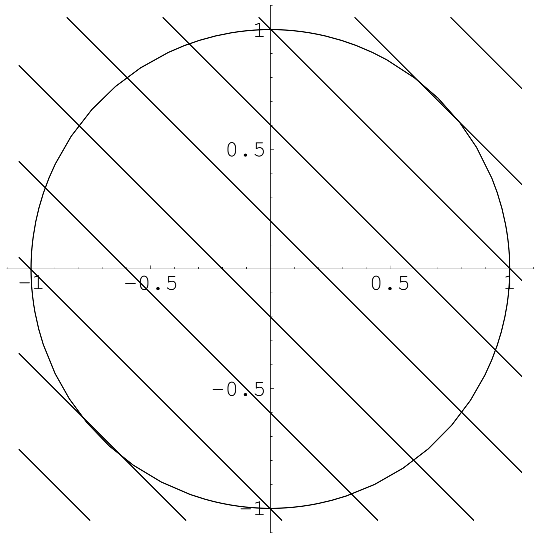

Bild 17 a) Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ mit
Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = x + y$

Alternative Begründung über die hinreichende Bedingung 2. Ordnung:

Für die Extremalkandidaten $P_{1,2}$ wird die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{Jg}(x,y) = \mathrm{grad}^T g(x,y) = (2x, 2y)$ überprüft.

$$P_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{1,2}) = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \Rightarrow TG(P_{1,2}) = \mathrm{spann}\left\{\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Aus $1 + 2\lambda x = 0$ erhält man $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ für P_1 und $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für P_2.
Damit ergibt sich

$$\mathrm{Hess}F(P_1) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{Hess}F(P_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\boldsymbol{y}^T\mathrm{Hess}F(P_1)\boldsymbol{y} = -2\sqrt{2} < 0$ ist P_1 ein strenges lokales Maximum.
Für P_2 erhält man $\boldsymbol{y}^T\mathrm{Hess}F(P_2)\boldsymbol{y} = 2\sqrt{2} > 0$. Damit ist P_2 ein strenges lokales Minimum.

b) Der Kreis $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ kann durch Polarkoordinaten parametrisiert werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} =: \mathbf{c}(t) , \quad 0 \le t < 2\pi ,$$

d.h. es gilt $g(\cos t, \sin t) = 0$. Man muss jetzt also nur noch die Extrema der Funktion

$$h(t) := f(\mathbf{c}(t)) = \cos t + \sin t$$

finden.

$$h'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4} \, , \, t_2 = \frac{5\pi}{4}$$

$$h''(t) = -\cos t - \sin t \quad \Rightarrow \quad h''(t_1) = -\sqrt{2} < 0 \, , \, h''(t_2) = \sqrt{2} \, .$$

Damit liegt für $t_1 = \pi/4$ ein Maximum mit dem Funktionswert $h(t_1) = \sqrt{2}$ und für $t_2 = 5\pi/4$ ein Minimum mit dem Funktionswert $h(t_2) = -\sqrt{2}$ vor.

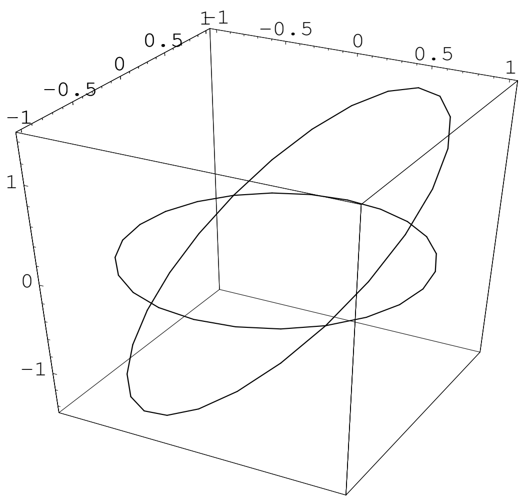

Bild 17 b) $\mathbf{c}(t)$ und $f(\mathbf{c}(t)) = \cos t + \sin t$

Aufgabe 18:

Für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = z^2$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter

a) Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) durch Bestimmung der Extremwerte von $f(\mathbf{c}(t))$ auf der Parametrisierung $\mathbf{c}$ der Schnittkurve von Zylinder und Ebene.

Lösung:

a) Nebenbedingungen: $g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 9$ und $g_2(x, y, z) = y - z$.

Regularitätsbedingung: $\boldsymbol{Jg}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

besitzt den Rang < 2, wenn die erste Zeile gleich dem Nullvektor ist, d.h. für die Punkte $(0, 0, z)$. Diese sind wegen $g_1(0, 0, z) = -9$ jedoch nicht zulässig.

Alle zulässigen Punkte erfüllen also die Regularitätsbedingung und die Lagrangesche Multiplikatorregel kann angewendet werden:

Lagrange-Funktion: $F(x, y, z) = z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 9) + \lambda_2(y - z)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x \\ 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z - \lambda_2 \\ x^2 + y^2 - 9 \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung:
1.Fall: $x = 0 \Rightarrow 0 = g_1(0, y, z) = y^2 - 9 \Rightarrow y = 3 = z \lor y = -3 = z$

Extremalkandidaten: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow z = 0 = y \Rightarrow x = 3 \lor x = -3$

Extremalkandidaten: $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die stetige Funktion f nimmt auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ ihr absolutes Maximum und Minimum an, da diese Schnittmenge eine Ellipse und damit kompakt ist. Unter den Extremalkandidaten befinden sich also absolutes Maximum und Minimum.

Für die Funktionswerte der Extremalkandidaten berechnet man

$$f(P_{1,2}) = 9\,, \quad f(P_{3,4}) = 0\,.$$

Also sind $P_{1,2}$ absolute Maxima und $P_{3,4}$ absolute Minima.

Alternative Begründung über die hinreichende Bedingung 2. Ordnung:
Für die Extremalkandidaten $P_{1,2,3,4}$ wird die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{Jg}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ überprüft.

Für $P_{1,2}$ erhält man

$$P_{1,2} = \pm(0,3,3)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TG(P_{1,2}) = \mathrm{spann}\left\{ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$0 = 2z - \lambda_2 = \pm 6 - \lambda_2 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = \pm 6 \;\Rightarrow\; 0 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 = \pm 6\lambda_1 \pm 6 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1$
Damit ergeben sich $P_{1,2}$ als strenge lokale Maxima, denn

$$\mathrm{Hess}F(P_{1,2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}^T \mathrm{Hess}F(P_{1,2})\boldsymbol{y} = -2 < 0\,.$$

Für $P_{3,4}$ mit $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = 0$ erhält man

$$P_{3,4} = (\pm 3,0,0)^T \Rightarrow \boldsymbol{Jg}(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} \pm 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TG(P_{3,4}) = \mathrm{spann}\left\{ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit ergeben sich $P_{3,4}$ als strenge lokale Minima, denn

$$\mathrm{Hess}F(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}^T \mathrm{Hess}F(P_{3,4})\boldsymbol{y} = 2 > 0\,.$$

b) Parametrisierung des Schnittellipse:

$$\mathbf{c}(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 3\sin(t)) \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Für $f(\mathbf{c}(t)) = 9\sin^2(t)$ erhält man dieselben Extrema $\mathbf{c}(t)$ für $t_{\min} = 0, \pi$ und $t_{\max} = \pi/2, 3\pi/2$.

MATLAB-Plotbefehle Bild 18 a

```
ezgraph3('surf','3*cos(x)','3*sin(x)','t',[-4,4,0,2*pi])
hold
ezgraph3('surf','x','y','y',[-4,4,-4,4])
```

MATLAB-Plotbefehle Bild 18 b

```
ezplot3('3*cos(t)','3*sin(t)','3*sin(t)',[0,2*pi])
hold
ezplot3('3*cos(t)','3*sin(t)','0',[0,2*pi])
ezplot3('3*cos(t)','3*sin(t)','(3*sin(t))^2',[0,2*pi])
```

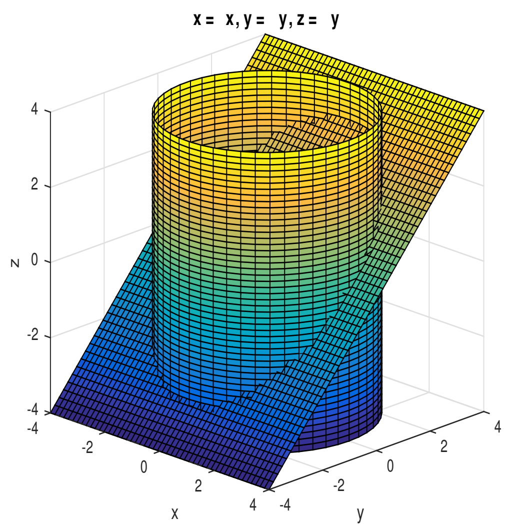

Bild 18 a: Zylinder g_1 und Ebene g_2

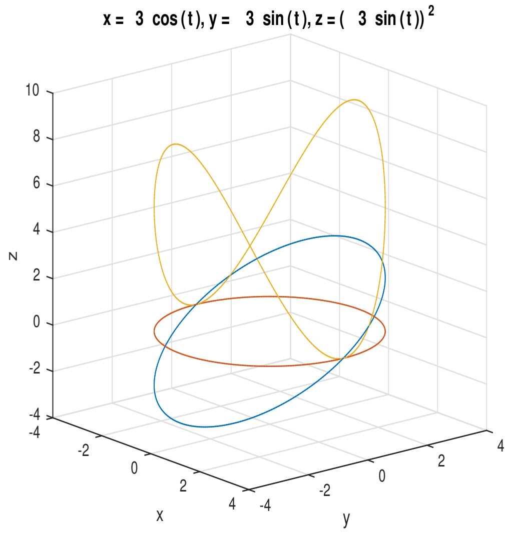

Bild 18 b: Schnittellipse $\mathbf{c}$ von g_1 und g_2, Kreis $K: x^2 + y^2 = 9, z = 0$ und $f(\mathbf{c})$ auf K

Differentialoperatoren für reellwertige Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$$

Nabla-Operator ∇:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T \quad \text{mit} \quad \nabla f(\boldsymbol{x}) = \text{grad} f(\boldsymbol{x}) = (f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, f_{x_n}(\boldsymbol{x}))^T$$

Laplace-Operator:

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{mit} \quad \Delta f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} =< \nabla, \nabla f(\boldsymbol{x}) >$$

Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

Eine Gleichung mit den reellwertigen Koeffizientenfunktionen $a_{i,j}, b_i, c, f$

$$\sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}) u + f(\boldsymbol{x}) = 0\,,$$

in der eine reellwertige Funktion $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ der reellen Variablen $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit ihren partiellen Ableitungen bis zur 2.ten Ordnung gesucht ist, wird als **lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung** bezeichnet.

Beispiele:

Wellengleichung:	$u_{tt} = \Delta u,$	$u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$
Wärmeleitungsgleichung:	$u_t = \Delta u,$	$u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$
Laplace-Gleichung:	$\Delta u = 0,$	$u = u(x_1, \ldots, x_n)$

Dabei bezieht sich Δu nur auf die Ortsvariablen von u, für $u = u(x, y)$ und $u = u(t, x, y)$ beispielsweise bedeutet dies $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

Aufgabe 19:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion
$$u(x,y,t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$
gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion
$$u(x,y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$
die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Lösung:

a) $u(x,y,t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

$u_t(x,y,t) = -5\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

$u_x(x,y,t) = \cos(x)\sin(2y)e^{-5t}$, $u_y(x,y,t) = 2\sin(x)\cos(2y)e^{-5t}$

$u_{xx}(x,y,t) = -\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$, $u_{yy}(x,y,t) = -4\sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$

Damit löst u die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$.

b) $u(x,y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$

$u_x(x,y) = n(\cos(nx) - 2\sin(nx))\sinh(ny)$,
$u_y(x,y) = n(\sin(nx) + 2\cos(nx))\cosh(ny)$

$u_{xx}(x,y) = -n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$,
$u_{yy}(x,y) = n^2(\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$

Damit löst u die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$.

Differentialoperatoren für vektorwertige Funktionen:

Divergenz für ein **Vektorfeld $\boldsymbol{f}$:**

$\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x}))^T$:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \nabla^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$$

Rechenregeln: für $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{div}(\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \ \mathrm{div}\boldsymbol{f} + \beta \ \mathrm{div}\boldsymbol{g} \ , \quad \mathrm{div}(\varphi \boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi, \boldsymbol{f}) + \varphi \ \mathrm{div}\boldsymbol{f}$$

Rotation im $\mathbb{R}^3$: $\boldsymbol{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} , \quad \mathrm{rot} \ \boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln: für $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{rot}(\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}) = \alpha \ \mathrm{rot}\boldsymbol{f} + \beta \ \mathrm{rot}\boldsymbol{g} \ , \quad \mathrm{rot}(\varphi \boldsymbol{f}) = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{f} + \varphi \ \mathrm{rot}\boldsymbol{f}$$

Rotation im $\mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{g} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T$$

ergibt sich aus der 3-ten Komponente der Rotation der Einbettung

$$\tilde{\boldsymbol{g}}(x, y, z) = (u(x, y), v(x, y), 0)^T$$

des Vektorfeldes in den $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{rot} \ \tilde{\boldsymbol{g}}(x, y, z) = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T = (0, 0, v_x - u_y)^T$$

Also rot $\boldsymbol{g} := v_x - u_y$.

Aufgabe 20:

Man berechne Divergenz und Rotation für folgende Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (xe^y, x^2y)^T$,

b) $\boldsymbol{g}(x,y) = (x^3, \sin y)^T$,

c) $3\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{g}(x,y)$,

d) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$,

e) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$,

f) $\boldsymbol{h}(x,y,z) + \boldsymbol{u}(x,y,z)$.

Lösung:

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (xe^y, x^2y)^T$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = f_{1x} + f_{2y} = e^y + x^2$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} = f_{2x} - f_{1y} = 2xy - xe^y$$

b) $\boldsymbol{g}(x,y) = (x^3, \sin y)^T$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{g} = g_{1x} + g_{2y} = 3x^2 + \cos y$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{g} = g_{2x} - g_{1y} = 0$$

c) $\mathrm{div}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3\mathrm{div}\boldsymbol{f} - \mathrm{div}\boldsymbol{g}$
$= 3(e^y + x^2) - (3x^2 + \cos y) = 3e^y - \cos y$

$\mathrm{rot}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3\mathrm{rot}\boldsymbol{f} - \mathrm{rot}\boldsymbol{g}$
$= 3(2xy - xe^y) - 0 = 6xy - 3xe^y$

alternativ:
$3\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{g}(x,y) = (3xe^y - x^3, 3x^2y - \sin y)^T$

$\mathrm{div}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 3e^y - 3x^2 + 3x^2 - \cos y = 3e^y - \cos y$
$\mathrm{rot}(3\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}) = 6xy - 3xe^y$

d) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$

$\text{div}\boldsymbol{h} = h_{1x} + h_{2y} + h_{3z} = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{h} = (h_{3y} - h_{2z}, h_{1z} - h_{3x}, h_{2x} - h_{1y})^T = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T$

alternativ:

$\boldsymbol{h}(x,y,z) = \varphi(x,y,z)\boldsymbol{v}$ mit $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ und $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Man erhält

$\nabla\varphi = (2x, 2y, 2z)^T$, $\text{div}\boldsymbol{v} = 0$, $\text{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ und
$(\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T$.

Damit ergibt sich

$\text{div}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) + \varphi\ \text{div}\boldsymbol{v} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} + \varphi\ \text{rot}\boldsymbol{v} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)^T$.

e) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$

$\text{div}\boldsymbol{u} = u_{1x} + u_{2y} + u_{3z} = 2x + 2y + 2z$

$\text{rot}\boldsymbol{u} = (u_{3y} - u_{2z}, u_{1z} - u_{3x}, u_{2x} - u_{1y})^T = (-2y + 2z, -2z + 2x, -2x + 2y)$

f) $\text{div}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = \text{div}\boldsymbol{h} + \text{div}\boldsymbol{u} = 2(2x + 2y + 2z)$

$\text{rot}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = \text{rot}\boldsymbol{h} + \text{rot}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

alternativ:

$\boldsymbol{h}(x,y,z) + \boldsymbol{u}(x,y,z) = (2x^2, 2y^2, 2z^2)$

$\text{div}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = (h_1 + u_1)_x + (h_2 + u_2)_y + (h_3 + u_3)_z = 4x + 4y + 4z$

$\text{rot}(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}) = (0 - 0, 0 - 0, 0 - 0)^T = \boldsymbol{0}$