Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{y^2}{2} - 2 \,\leq\, x \,\leq\, 4 - y^2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Menge D und bestimmen Sie den Schwerpunkt von D bei homogener Massendichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho = 2$.

Hinweis: Es gilt

Masse: $M = \displaystyle\int_D \rho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$

Schwerpunkt: $X_s = \dfrac{1}{M} \displaystyle\int_D \rho(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x}$ (komponentenweise)

b) Sei $K := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0 \right\}$. Berechnen Sie

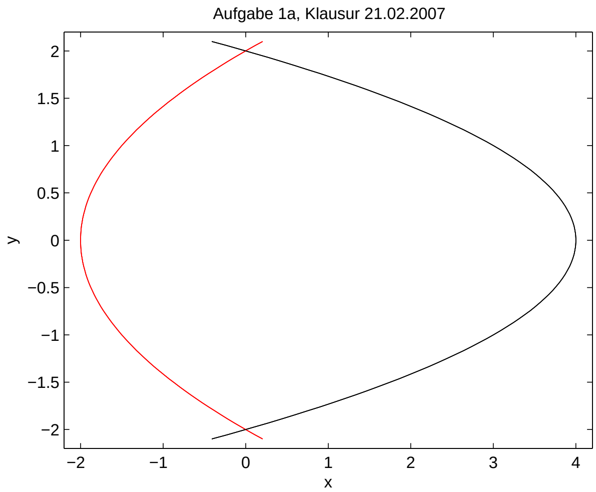
$$\int_K (y^2 - x^2)\, d(x,y,z)$$

Hinweise:
- *Verwendung von* **Kugelkoordinaten** *spart Arbeit.*
- *Es gilt* $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.

Lösungsskizze Aufgabe 1:

a) Wie man der Skizze entnimmt gilt

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \,\leq\, y \,\leq\, 2, \frac{y^2}{2} - 2 \,\leq\, x \,\leq\, 4 - y^2 \right\} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$



[1 Punkt]

Zur Berechnung des Schwerpunktes, rechnet man zunächst die Masse M aus.

$$M = \int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \rho\, dx\, dy = 2\int_{-2}^{2} 4 - y^2 - \frac{y^2}{2} + 2\, dy$$

$$= 2\left[-\frac{y^3}{2} + 6y\right]_{-2}^{2} = 4(-4+12) = 32 \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Für die y–Komponente des Schwerpunktes gilt aus Symmetriegründen : $y_s = 0$. **[1 Punkt]**

Für die x–Komponente des Schwerpunktes erhält man

$$x_s = \frac{1}{M}\int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \rho\, x\, dx\, dy = \frac{1}{M}\int_{-2}^{2} 2\cdot\frac{1}{2}\left((4-y^2)^2 - \frac{(y^2-4)^2}{4}\right) dy$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-2}^{2}\frac{3}{8}(4-y^2)^2\, dy = \frac{3}{8\cdot 16}\left[16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{3}{8\cdot 8}(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}) = \frac{3}{2} - 1 + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

b) Übergang zu Kugelkoordinaten ergibt (vgl. Blatt 2, Aufgabe 2) mit

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det\, \Phi &= \sin\theta \begin{vmatrix} -r\sin\phi\cos\theta & -r\ \cos\ \phi\sin\theta \\ r\cos\phi\cos\theta & -r\ \sin\ \phi\sin\theta \end{vmatrix} + r\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \sin\theta\ \bigl(r^2\ \sin\theta\ \cos\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\bigr) \\
&+\ r\cos\theta\ \bigl(r\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\bigr) \\
&=\ r^2\cos\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\ =\ r^2\cos\theta\,,
\end{aligned}$$

$$\int_K (y^2 - x^2)\, d(x,y,z) =$$

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2\left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)\cos^2\theta \cdot r^2\cos\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^1 r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta) \left(\int_0^{2\pi} -\cos 2\varphi\, d\varphi \right) d\theta\, dr = 0$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Körper $K := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4\,,\ 0 \leq z \leq 5 - x + y,\ \}$

und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (x,\ y,\ 2(x^2 + y^2)z\,)^{\mathrm{T}}$.

a) Skizzieren Sie K und geben Sie Parametrisierungen für die drei glatten Flächenstücke F_1, F_2 und F_3 an, die K beranden.

b) Berechnen Sie den Fluß von $\boldsymbol{f}$ durch die Flächenstücke F_1, F_2 und F_3

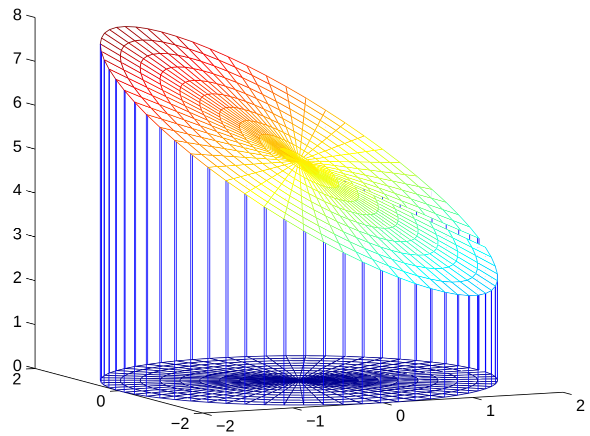
c) Berechnen Sie das Volumenintegral $\int\limits_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}$ und verifizieren Sie damit für dieses Beispiel den Gaußschen Integralsatz.

Lösung:

a) $x^2 + y^2 \leq 4$: Zylinder mit Radius 2, Achse $=$ $z-$ Achse

Nach unten begrenzt durch $z \geq 0$ also $x - y-$ Ebene

Nach oben begrenzt durch Ebene $z = 5 - x + y$



Parametrisierung $F_1 =$ Boden: Kreisscheibe in $x - y-$ Ebene um Null

$$p_1(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r \in [0, 2],\ \phi \in [0, 2\pi]$$

Parametrisierung $F_2 =$ Mantel: $x^2 + y^2 = 4\,,\ 0 \leq z \leq 5 - x + y$

$$p_2(\phi, z) = \begin{pmatrix} 2\cos\phi \\ 2\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \phi \in [0, 2\pi],\ z \in [0,\ 5 - 2\cos\phi + 2\sin\phi]$$

Parametrisierung $F_3 =$ Dach:

Projktion auf $x - y-$ Ebene = Kreisscheibe, $z = 5 - x + y$

$$p_3(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 5 - r\cos\phi + r\sin\phi \end{pmatrix}, \qquad r \in [0,2],\ \phi \in [0,2\pi]$$

b) Fluss durch F_1:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} \times \frac{\partial p_1}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Äußere Normale weist nach unten. Also wähle

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\partial p_1}{\partial \phi} \times \frac{\partial p_1}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (x,\, y,\, 2(x^2+y^2)z)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{f}(p_1(r,\phi) = \boldsymbol{f}(r\cos\phi, r\sin\phi, 0) = (r\cos\phi, r\sin\phi, 0)^T$$

$$< f(p_1(r,\phi)),\, \boldsymbol{v}_1 >= 0 \implies \int_{F_1} \boldsymbol{f}\, dO = 0$$

Durch den Boden fließt nichts!

Fluss durch F_2:

$$\frac{\partial p_2}{\partial \phi} \times \frac{\partial p_2}{\partial z} = \begin{pmatrix} -2\sin\phi \\ 2\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\phi \\ 2\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_2(\phi,z)$$

Äußere Normale weist nach außen. Vorzeichen des Kreuzproduktes stimmt also!

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (x,\, y,\, 2(x^2+y^2)z)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{f}(p_2(\phi,z) = \boldsymbol{f}(2\cos\phi, 2\sin\phi, z) = (2\cos\phi, 2\sin\phi, 8z)^T$$

$$< f(p_2(\phi,z)),\, \boldsymbol{v}_2(\phi,z) >= 4\cos^2(\phi) + 4\sin^2(\phi) = 4$$

$$\begin{aligned} \int_{F_2} \boldsymbol{f} \cdot dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^{5-2\cos\phi+2\sin\phi} 4\, dz\, d\phi = \int_0^{2\pi} [4z]_0^{5-2\cos\phi+2\sin\phi}\, d\phi \\ &= 4\int_0^{2\pi} 5 - 2\cos\phi + 2\sin\phi d\phi \\ &= 4 \cdot 5 \cdot 2\pi = 40\pi\,. \end{aligned}$$

Fluss durch F_3: $p_3(r,\phi) = (r\cos\phi,\, r\sin\phi,\, 5 - r\cos\phi + r\sin\phi)^T$

$$\frac{\partial p_3}{\partial r} \times \frac{\partial p_1}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -\cos\phi + \sin\phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ r\sin\phi + r\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ r \end{pmatrix} 0 := v_3(r,\phi)$$

Äußere Normale weist nach oben. Vorzeichen des Kreuzproduktes stimmt also!

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := (x,\, y,\, 2(x^2+y^2)z)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{f}(p_3(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, 2r^2(5 - r\cos\phi + r\sin\phi))^T$$

$$< f(p_3(r,\phi)),\, \boldsymbol{v}_3 >= r^2\cos\phi \,-\, r^2\sin\phi \,+\, 10r^3 - 2r^4\cos\phi + 2r^4\sin\phi$$

$$\begin{aligned}\int_{F_3} \boldsymbol{f}\cdot dO &= \int_0^2\int_0^{2\pi} (r^2\cos\phi \,-\, r^2\sin\phi \,+\, 10r^3 - 2r^4\cos\phi + 2r^4\sin\phi)\, d\phi dr \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi} 10r^3\, d\phi dr \;=\; 2\pi\int_0^2 10r^3\, dr \;=\; 80\pi\,.\end{aligned}$$

c) $K: x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi,\ r\in[0,2],\ \phi\in[0,2\pi],$
$0 \le z \le 5 - r\cos\phi + r\sin\phi$
$\operatorname{div}\ \boldsymbol{f}(x,y,z) = 1 + 1 + 2(x^2+y^2)$

$$\int_K \operatorname{div}\boldsymbol{f}\, d(x,y,z) \;=\; \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{5-r\cos\phi+r\sin\phi} (2+2r^2)\cdot r\, dz d\phi dr$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} (2r+2r^3)(5 - r\cos\phi + r\sin\phi)\, d\phi\, dr = \int_0^2 (2r+2r^3)\cdot 10\pi\, dr$$

$$= 10\pi(\,2^2 + \frac{2^4}{2}\,) \;=\; 120\pi$$

Was nach dem Satz von Gauß auch zu erwarten war.