Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Prüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder $\boldsymbol{v}^{[i]} : D \to \mathbb{R}^n, \quad n = 2$ bzw. 3 Potentiale besitzen und geben Sie gegebenenfalls jeweils ein Potential an.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^{[1]}(x,y) &= (-y, x)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2 \\
\boldsymbol{v}^{[2]}(x,y) &= (x^3, y^3)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2 \\
\boldsymbol{v}^{[3]}(x,y,z) &= (xy^2 + xz^2\,,\, yx^2 + yz^2\,,\, zy^2 + zx^2)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3 \\
\boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z) &= (-y^2\,,\; xy\,,\; -2y)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3\,.
\end{aligned}$$

b) Gegeben ist

$$\boldsymbol{v}^{[5]}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right) \; ; z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}^{[5]})$ und

$$\oint_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}^{[5]}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

entlang des Kreises

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(3\cos(2t), 3\sin(2t), 1\big) \quad t \in [0, \pi].$$

Besitzt $\boldsymbol{v}^{[5]}$ ein Potential?

Lösungsskizze Aufgabe 1:

a) (i) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}^{[1]}) = 1 - (-1) \neq 0 \;\Rightarrow\;$ kein Potential.

(ii) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}^{[2]}) = 0$, $\phi = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$ ist ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[2]}$.

(iii) Sei Φ ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[3]}$. Dann gilt

$$\Phi_x = xy^2 + xz^2\,, \quad \Phi_y = yx^2 + yz^2\,, \quad \Phi_z = zy^2 + zx^2.$$

$$\Phi_x = xy^2 + xz^2 \iff \Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + x^2z^2\right) + c(y,z)$$

$$\Phi_y = yx^2 + c_y(y,z) = yx^2 + yz^2 \iff c_y(y,z) = yz^2$$

$$\iff c(y,z) = \frac{1}{2}y^2z^2 + d(z) \implies \Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2\right) + d(z)$$

$$\Phi_z = zx^2 + zy^2 + d_z = zx^2 + zy^2 \implies d_z = 0 \implies d = Konst.$$

Also haben wir mit $\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$ ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[3]}$ gefunden.

(iv) Es gilt $\dfrac{\partial(\boldsymbol{v}_1^{[4]})}{\partial y} = -2y \neq \dfrac{\partial(\boldsymbol{v}_2^{[4]})}{\partial x} = y$ es gibt also kein Potential zu $\boldsymbol{v}^{[4]}$.

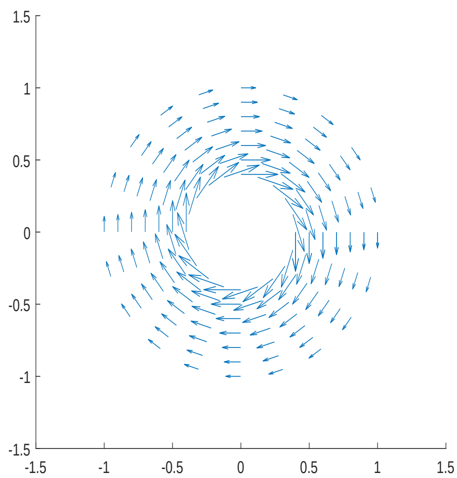
b) Es gilt zwar

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{v}^{[5]}\right) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

Hieraus läßt sich aber nicht schließen, daß $\boldsymbol{v}^{[5]}$ ein Potential besitzt. Der Definitionsbereich ist nicht einfach zusammenhängend.

Für die geschlossene Kurve $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0,\pi]$ erhält man

$$\begin{aligned}
\oint_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v}^{[5]}(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^\pi < \begin{pmatrix} -\frac{\sin(2t)}{3} \\ \frac{\cos(2t)}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6\sin(2t) \\ 6\cos(2t) \\ 0 \end{pmatrix} > dt \\
&= \oint_0^\pi 2\,dt \\
&= 2\pi \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{Es gibt kein Potential.}
\end{aligned}$$



Hinweis: Für $\Phi(x,y) := \arctan(\frac{y}{x})$ gilt zwar $\nabla\Phi = \boldsymbol{v}^{[5]}$, aber Φ ist entlang geschlossener Kurven um Null nicht definiert!

Aufgabe 2)

Berechnen Sie zu den unten angegebenen Kraftfeldern $\mathbf{K}$ und den jeweils angegebenen Kurven $\boldsymbol{r}$ die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\boldsymbol{r}$ von $\boldsymbol{r}(a)$ nach $\boldsymbol{r}(b)$ zu bewegen.

a) $$\tilde{\mathbf{K}}(x,y) := \boldsymbol{v}^{[2]}(x,y) = (x^3, y^3)^T,$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t(t-4)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\right)^T, \qquad t \in [a,b] := [0,4].$$

b) $$\hat{\mathbf{K}}(x,y,z) := \boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z) = (-y^2\ ,\ xy\ ,\ -2y)^T$$

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\cos(t),\ 2\sin(t),\ t)^T \qquad t \in [a,b] := [0\ ,\ \frac{\pi}{2}].$$

c) $$\mathbf{K}(x,y,z) := (2x + yz\ ,\ 2y + zx\ ,\ 2z + xy\ )^T,$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(\sin(t)\ ,\ 1-\cos^2(t)\ ,\ \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^T \qquad t \in [a,b] := \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Lösungsskizze Aufgabe 2)

a) Nach Aufgabe 1 erhalten wir für $\boldsymbol{v}^{[2]}(x,y)$.

$$\int_{\boldsymbol{r}} \tilde{\mathbf{K}}(x,y)d(x,y) = \Phi(\boldsymbol{r}(4)) - \Phi(\boldsymbol{r}(0)) = \Phi\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 4^3 = 64$$

b) Nach Aufgabe 1 gibt es kein Potential zu $\hat{K}$. Wir berechnen also direkt den Wert des Kurvenintegrals.

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{r}} \hat{\mathbf{K}}(x,y,z)d(x,y,z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} <\ \hat{\mathbf{K}}(\boldsymbol{r}(t)), \dot{\boldsymbol{r}}(t)\ >\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} < \begin{pmatrix}-4\sin^2(t)\\ 4\sin(t)\cos(t)\\ -4\sin(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\sin(t)\\ 2\cos(t)\\ 1\end{pmatrix} > dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin(t)\left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right) - 4\sin(t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin(t) = -4\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\cdot\end{aligned}$$

c) Wir prüfen zunächst, ob das Kraftfeld

$$\mathbf{K}(x,y,z) := (2x + yz\ ,\ 2y + zx\ ,\ 2z + xy\ )^T$$

ein Potential Φ besitzt, und zwar konstruktiv:

$\Phi_x = K_1 = 2x + yz \Longrightarrow \Phi(x,y,z) = x^2 + xyz + g(y,z)$

$\Phi_y = xz + g_y = K_2 = 2y + zx \implies g(y,z) = y^2 + h(z),$
$\implies \Phi(x,y,z) = x^2 + xyz + y^2 + h(z)$

$\Phi_z = xy + h_z = K_3 = 2z + xy \implies h(z) = z^2 + C$

Durch $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ ist also ein Potential von K gegeben. Für die aufgewendete Arbeit gilt damit

$$A = \Phi(\boldsymbol{r}\,(\pi/2)) - \Phi(\boldsymbol{r}\,(0)) = \Phi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 4.$$

Bearbeitungstermine: 16.01.-20.01.2017