Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}} \right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 .$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei ($\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$)?
Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ($\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x,y) := (f_2)_x - (f_1)_y = \mathbf{0}$) wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y)^{\mathrm{T}}.$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}), \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f})$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion f identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$ identisch verschwindet.

Lösungsskizze Aufgabe 1:

a) Sei $u := f_1$, $v := f_2$. Dann gilt $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = u_x + v_y$.

$$u_x = \frac{-y(-\alpha)(x^2+y^2)^{\alpha-1}2x}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$$v_y = \frac{x(-\alpha)(x^2+y^2)^{\alpha-1}2y}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

Das Vektorfeld ist für alle $\alpha > 0$ quellenfrei. [**2 Punkte**]

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f}(x,y) = v_x(x,y) - u_y(x,y) .$$

$$v_x = \frac{(x^2+y^2)^\alpha - x\alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}2x}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$$u_y = \frac{-(x^2+y^2)^\alpha + y\alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}2y}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)^\alpha - 2(x^2+y^2)\alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2)^{2\alpha}} = \frac{2-2\alpha}{(x^2+y^2)^\alpha} .$$

Die Rotation verschwindet also genau dann, wenn $\alpha = 1$ ist. [**2 Punkte**]

b) $\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = (x^2+y+4z,\; y^2+2z+5x,\; z^2+3x+6y\,)^{\mathrm{T}}.$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{f} \;=\; 2x+2y+2z, \quad \nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{f}) \;=(2,2,2)^T\,.\textbf{[2 Punkte]}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f} \;=\; \begin{pmatrix}(f_3)_y-(f_2)_z\\(f_1)_z-(f_3)_x\\(f_2)_x-(f_1)_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-2\\4-3\\5-1\end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\,.\textbf{[2 Punkte]}$$

$\operatorname{rot}(\operatorname{div}\,\boldsymbol{f}\,)$ ist nicht definiert. [**1 Punkt**]

Hier verschwindet $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\,\boldsymbol{f}\,)$ identisch. Wie das folgende Beispiel zeigt, gilt das allerdings nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$.

$$\tilde f(x,y,z) := \begin{pmatrix}y^3\\0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rot}\tilde f(x,y,z) = \begin{pmatrix}0\\0\\-3y^2\end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\tilde f(x,y,z)\right) = \begin{pmatrix}6y\\0\\0\end{pmatrix}\,.\textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 2)

Es seien für $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Funktionen

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z^3 \\ \cos(x+y) \\ 3xz^2 + \frac{2z}{1+z^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) + z^3 \\ \cos(x+y) \\ xz^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Rotationen $\mathbf{rot}\ \mathbf{f}$ und $\mathbf{rot}\ \mathbf{g}$.

b) Überprüfen Sie für beide Vektorfelder $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, ob diese ein Potential besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches.

c) Berechnen Sie die beiden Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x}$ und $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x}$, wobei die Kurve $\mathbf{c}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{c}(t) = \left(t\ ,\ 2t\ ,\ t^2\right)^T\ ,\ t \in [0, \pi]\ .$$

Lösung:
a) [2 Punkte]

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 3z^2 - 3z^2 \\ -\sin(x+y) - (-\sin(x+y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} (g_3)_y - (g_2)_z \\ (g_1)_z - (g_3)_x \\ (g_2)_x - (g_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 3z^2 - z^2 \\ -\sin(x+y) - (-\sin(x+y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)
Da $\mathbf{rot}\ \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, besitzt $\mathbf{g}$ kein Potential auf $\mathbb{R}^3$. [1 Punkt]

Berechnung des Potentials ϕ von $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned}
\phi_x &= \cos(x+y) + z^3 \\
&\quad \Rightarrow \phi(x,y,z) = \sin(x+y) + xz^3 + g(y,z) \\
\phi_y &= \cos(x+y) + g_y \overset{!}{=} \cos(x+y) \\
&\quad \Rightarrow g_y = 0 \ \Rightarrow\ g = g(z) \\
\phi_z &= 3z^2x + g_z \overset{!}{=} 3xz^2 + \frac{2z}{1+z^2} \\
&\quad \Rightarrow g_z = \frac{2z}{1+z^2} \ \Rightarrow\ g(z) = \ln(1+z^2) + C\ ,\quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \phi(x,y,z) = \sin(x+y) + xz^3 + \ln(1+z^2) + C \ , \quad C \in \mathbb{R} \qquad \text{[3 Punkte]}$$

c)
Da die Funktion $\mathbf{f}$ das Potential ϕ besitzt, gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x} = \phi(\mathbf{c}(\pi)) - \phi(\mathbf{c}(\mathbf{0})) \ &= \ \big(\sin(\pi+2\pi) + \pi^7 + \ln(1+\pi^4)\big) - (0+0+0) = \\ &= \ \pi^7 + \ln(1+\pi^4) \end{aligned}$$

Alternativ direkt berechnen:

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} \cos(3t) + t^6 \\ \cos(3t) \\ 3t^5 + \frac{2t^2}{1+t^4} \end{pmatrix} \ , \quad t \in [0,\pi]$$

$$\mathbf{c}(t) = \big(t \ , \ 2t \ , \ t^2\big)^T \ , \ t \in [0,\pi] \ \Rightarrow \ \mathbf{c}'(t) = (1 \ , \ 2 \ , \ 2t)^T \ , \ t \in [0,\pi]$$

$$\begin{aligned} \langle\ \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \ , \ \mathbf{c}'(t)\ \rangle \ &= \ \cos(3t) + t^6 + 2\cos(3t) + 6t^6 + \frac{4t^3}{1+t^4} = \\ &= \ 3\cos(3t) + 7t^6 + \frac{4t^3}{1+t^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbf{c}} \mathbf{f}\, d\boldsymbol{x} \ &= \ \int\limits_0^{\pi} \langle\ \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \ , \ \mathbf{c}'(t)\ \rangle\, dt = \int\limits_0^{\pi} \left(3\cos(3t) + 7t^6 + \frac{4t^3}{1+t^4}\right) dt = \\ &= \ \big[\sin(3t) + t^7 + \ln(1+t^4)\big]_0^{\pi} = \pi^7 + \ln(1+\pi^4) \qquad \text{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\,\boldsymbol{x}$ muss man direkt berechnen:

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} \cos(3t) + t^6 \\ \cos(3t) \\ t^5 \end{pmatrix} \ , \quad t \in [0,\pi]$$

$$\begin{aligned} \langle\ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) \ , \ \mathbf{c}'(t)\ \rangle \ &= \ \cos(3t) + t^6 + 2\cos(3t) + 2t^6 = \\ &= \ 3\cos(3t) + 3t^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g}\, d\boldsymbol{x} &= \int_0^{\pi} \langle\ \mathbf{g}(\mathbf{c}(t))\ ,\ \mathbf{c}'(t)\ \rangle\, dt = \int_0^{\pi} \left(3\cos(3t) + 3t^6\right) dt = \\ &= \left[\sin(3t) + \frac{3}{7}t^7\right]_0^{\pi} = \frac{3}{7}\pi^7 \qquad \text{[2 Punkte]}\end{aligned}$$

Abgabetermine: 16.01.-20.01.17