Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Gesucht sind die Minima von} & f(x,y) \;=\; x^2+y^2 \\ \text{unter der Nebenbedingung} & h(x,y) = xy-9=0\,. \end{array} \tag{1}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Bemerkung: Die Aufgabe kann natürlich auch durch Elimination einer der Variablen gelöst werden. Hier soll an einem einfachen Beispiel die neu eingeführte Lösungsmethode geübt werden.

Lösungsskizze zur Aufgabe 1:

Regularitätsbedingung: $\nabla h(x,y) = (y,x)^T \neq (0,0)^T$ ist auf der zulässigen Menge erfüllt.

Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$xy - 9 = 0\,.$$

Gleichungssystem lösen: (I) $(2x-\mu y)\cdot x = 0$ (II) $(2y-\mu x)\cdot y = 0$

(I) $-$ (II) liefert $y^2 = x^2$. Die Nebenbedingung $h=0$ liefert $x = 9/y$.

Man erhält also $y^2 = \frac{81}{y^2}$ und damit $y = \pm 3 = x$.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\,, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}\,.$$

Für beide Punkte erhält man $\mu = 2$ und mit $L := f - \mu\, h$ die Hessematrix

$$H_{\boldsymbol{x}}\, L(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} 2 & -\mu \\ -\mu & 2 \end{pmatrix}\,, \qquad H_x L(\pm 3, \pm 3, -2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Die Determinante der Hessematrix ist gleich Null. Sie hat einen positiven Eigenwert und den Eigenwert Null.

Die Gradienten in den kritischen Punkten sind $(\pm 3, \pm 3)^T$. Der Tangentialraum ker $D\mathbf{h}(\pm 3, \pm 3)$ ergibt sich also also als $k(1,-1)^T$.

$$k(1,-1)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \;=\; 8k^2 \;>\; 0,\, \forall k \neq 0\,.$$

In beiden Punkten liegen (lokale) Minima vor.

Aufgabe 2)

Gesucht sind die Minima der Funktion

$$f(x,y) := e^{x+y} - x^2 - y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$h(x,y) := 2x^2 + 2y^2 - 5x + 3y = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $P_0 = (2, -2)^T$ ein zulässiger Punkt ist, in dem die Regularitätsbedingung erfüllt ist.

b) Weisen Sie nach, dass $P_0 = (2, -2)^T$ zusammen mit einem geeigneten Multiplikator ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist.

c) Zeigen Sie, dass im Punkt $P_0 = (2, -2)^T$ ein lokales Minimum der Funktion f unter der gegebenen Nebenbedingung vorliegt. Überprüfen Sie dazu die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2:

a) Zulässigkeit: $h(2,-2) := 2\cdot 2^2 + 2\cdot(-2)^2 - 5\cdot 2 + 3\cdot(-2) = 8+8-10-6 = 0\,.$ **(1 Punkt)**

Es gilt grad $h(x,y)^T = (4x-5, 4y+3)$

und die Regularitätsbedingung: grad $h(2,-2)^T = (3,-5) \neq (0,0)$ ist erfüllt. **(1 Punkt)**

b) Mit $L = f - \mu h$ müssen für den zulässigen stationären Punkt noch folgende Gleichungen gelten:

$$L_x(x,y,\mu) = e^{x+y} - 2x - \mu(4x-5) = 0\,,$$
$$L_y(x,y,\mu) = e^{x+y} - 2y - \mu(4y+3) = 0\,.\textbf{(1 Punkt)}$$

Im gegebenen Punkt also

$$L_x(2,-2,\mu) = e^0 - 4 - \mu(3) = -3 - 3\mu = 0\,,$$
$$L_y(2,-2,\mu) = e^0 + 4 - \mu(-5) = 5 + 5\mu = 0\,.\textbf{(1 Punkt)}$$

Beide Bedingungen werden offensichtlich mit $\mu = -1$ erfüllt. **(1 Punkt)**

c) Die Hessematrix ist $H(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} e^{x+y} - 2 - 4\mu & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} - 2 - 4\mu \end{pmatrix}$ **(1 Punkt)**

In unserem Punkt ist die Hessematrix gegeben durch:

$$H(2,-2,-1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\ \textbf{(1 Punkt)}$$

– Anwendung von Gerschgorin oder

– $\det H(2,-2,-1) = 9 - 1 > 0$ und $H(2,-2,-1)_{11} = 3 > 0$ oder

– Berechnung der Eigenwerte: $(3-\mu)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 3 \pm 1 > 0$

zeigt, dass die Matrix positivdefinit ist. Es liegt ein Minimum vor. **(1 Punkt)**

Bearbeitungstermine: 19.12.-23.12.2016