Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Bestimmen Sie die Minima von} & f(x,y) \;=\; xy \\ \text{unter der Nebenbedingung} & h(x,y) = x^2+4y^2-8 \leq 0\,. \end{array} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $x^2+4y^2-8<0$? Begründen Sie ihre Antwort.
(Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y)=xy$.)

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$h(x,y) = \; x^2+4y^2-8 \;=\; 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
(Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Lösung zur Aufgabe 1: Zu a). Notwendige Bedingung für Minimum im Innern:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad x=y=0\,. \text{ [}\mathbf{1\ Punkt}\text{]}$$

Hinreichende Bedingung überprüfen:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit} \;\Rightarrow\; \text{kein Minimum. [}\mathbf{1\ Punkt}\text{]}$$

(Alternativ kann man z.B. f entlang der Geraden $y=\pm x$ untersuchen.)

Zu b). Regularitätsbedingung: $\nabla h(x,y) = (2x,8y)^T \neq (0,0)^T$ auf der zulässigen Menge erfüllt. [**1 Punkt**]

Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [\;\mathbf{1\ Punkt}]$$
$$x^2+4y^2-8=0\,.$$

Gleichungssystem lösen:

(I+III) $(y = -2\mu x) \wedge (x^2 + 4y^2 - 8 = 0) \Rightarrow x^2 + 16\mu^2 x^2 = 8\,.$

(I+II) $(y = -2\mu x) \wedge (x = -8\mu y) \Rightarrow x = 16\mu^2 x \Leftrightarrow x(1 - 16\mu^2) = 0\,.$

Wegen (I+III) führt $x = 0$ zu keiner Lösung. Also folgt aus (I+II) $16\mu^2 = 1 \iff \mu = \pm\frac{1}{4}\,.$

Dies eingesetzt in (I+III) ergibt $2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\,.$

Schließlich ergeben sich mit $y = -2\mu x$ vier Kandidaten für lokale Extrema:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\,, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \quad P_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Berechnung der Kandidaten : [**3 Punkte**]

Es gilt $f(P_1) = f(P_2) = -2$ und $f(P_3) = f(P_4) = 2$. Weil die stetige Funktion f auf dem Kompaktum

$$\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 - 8 = 0\right\}$$

ihr Minimum annimmt, liegen in P_1 und P_2 globale Minima vor. (Alternativ, wenn auch unnötig aufwändig, könnte man hinreichende Bedingungen 2. Ordnung überprüfen.) [**2 Punkte**]

Zu c). Da auch

$$\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 - 8 \le 0\right\}$$

kompakt ist, nimmt auch hier die Funktion f ihr Minimum an. Allerdings nicht im Innern (siehe a)). Also liegt das globale Minimum von f auf dem Rand. Wegen b) kommen dafür nur P_1 und P_2 in frage. Weil wiederum $f(P_1) = f(P_2) = -2$ gilt, liegen in beiden Punkten globale Minima für (1). [**1 Punkt**]

Aufgabe 2:

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) \;:=\; x^2+y^2+z^2$$

unter den Nebenbedingungen $\boldsymbol{h}\,(x,y,z)=(0,0)^T$, wobei

$$\begin{aligned} h_1(x,y,z) &:= x^2+y^2-z^2\,, \qquad \text{und} \\ h_2(x,y,z) &:= x+2\sqrt{2}y+z-1\,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass alle zulässigen Punkte die Regularitätsbedingung (Rang $D(h_1,h_2)=2$) erfüllen.

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

zusammen mit geeigneten Multiplikatoren ein stationärer Punkt der Lagrange Funktion $L(\,\boldsymbol{x}\,,\lambda,\mu) := f(x,y,z)-\lambda h_1(x,y,z)-\mu h_2(x,y,z)$ ist.

c) Klassifizieren Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{x}^*$. Überprüfen Sie also, ob in $\boldsymbol{x}^*$ ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Lösungsskizze Aufgabe 2: [2+4+4 Punkte]

a) Es ist

$$D\mathbf{h}(x,y,z) = J\mathbf{h}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese hat Rang 1, falls $\lambda\cdot(2x,2y,-2z)=(1,2\sqrt{2},1)$ ist. In diesem Fall folgt

$$2x = \frac{y}{\sqrt{2}} = -2z.$$

Die Matrix kann also nur in den Punkten $(x, 2\sqrt{2}x, -x)$ keinen vollen Rang haben. Es ist

$$\begin{aligned} h_1(x,2\sqrt{2}x,-x) &= 8x^2, \\ h_2(x,2\sqrt{2}x,-x) &= 8x-1. \end{aligned}$$

Diese beiden Ausdrücke sind nie gleichzeitig 0, also hat die Jacobi-Matrix in allen zulässigen Punkten vollen Rang. [**2 Punkte**]

b) Die Lagrange Funktion und ihr Gradient sind gegeben durch

$$L(\mathbf{x},\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2-\lambda\cdot(x^2+y^2-z^2)-\mu\cdot(x+2\sqrt{2}y+z-1), \text{mit}$$

$$\nabla L(\mathbf{x},\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 2x-2\lambda x-\mu \\ 2y-2\lambda y-2\cdot\sqrt{2}\mu \\ 2z+2\lambda z-\mu \\ -(x^2+y^2-z^2) \\ -(x+2\cdot\sqrt{2}y+z-1) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Zu erfüllen ist das System $\nabla L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \mathbf{0}$.
Für $\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ lautet das System

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3} - \mu &= 0\\
\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda - 2\sqrt{2}\mu = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3} - \mu\right) &= 0\\
-1 - \lambda - \mu = 0 \iff \mu &= -1 - \lambda \quad .\\
\frac{1}{36} + \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = \frac{1+8-9}{36} &= 0\\
\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{+1+8-3-6}{6} &= 0
\end{aligned}$$

Die letzten drei Gleichungen sind für $\mathbf{x}^*$ und $\mu = -1-\lambda$ erfüllt. Die zweite und die erste Gleichung sind äquivalent. Mit $\mu = -1-\lambda$ liefern beide:

$$\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3} + 1 + \lambda = 0 \iff \frac{2\lambda}{3} = -\frac{4}{3} \iff \lambda = -2\,.$$

Mit $\mathbf{x}^*$ ist zusammen mit $\lambda^* = -2$ und $\mu^* = 1$ ein stationärer Punkt der Lagrange Funktion. [**3 Punkte**]

c) Die Hessematrix $H_{\boldsymbol{x}}\, L(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$ lautet

$$H_{\boldsymbol{x}}\, L(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-2\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2+2\lambda \end{pmatrix}.$$

Für $\mathbf{x}^*$: Wir haben

$$H_{\boldsymbol{x}}\, L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) = \begin{pmatrix} 2-2\lambda^* & 0 & 0\\ 0 & 2-2\lambda^* & 0\\ 0 & 0 & 2+2\lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

und es ist

$$D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z\\ 1 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\Big|_{\mathbf{x}^*} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 3\\ 3 & 6\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Der Kern ist gegeben durch

$$\ker D\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \left\{ \left(x, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,x, 0\right)^T \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

und hier ist die Hesse-Matrix positiv definit, denn

$$\left(x, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,x, 0\right)\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,x\\ 0 \end{pmatrix} = 6x^2 + \frac{6}{8}x^2 > 0 \qquad \forall x \neq 0.$$

Es liegt also ein (lokales?) Minimum vor. [**1 Punkt**]

Aufgabe 3) (10 Sonderpunkte) Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 27x_1 x_2^2 + 25 \\ 4x_1^2 - 3x_2^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Näherung für eine nahe $\boldsymbol{x}^{[0]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelegene Lösung des Systems, in dem Sie ausgehend von $\boldsymbol{x}^{[0]}$ mindestens zwei Schritte des Newtonverfahrens durchführen.

Lösungsskizze:

Iterationsvorschrift: Bei gegebenem Punkt $\boldsymbol{x}^{[k]}$

- Berechne $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$,
- Berechne die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$,
- Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \cdot \Delta^{[k]} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$
- Setze $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} + \Delta^{[k]}$.

Es gilt $\quad \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 27x_2^2 & -54x_1 x_2 \\ 8x_1 & -9x_2^2 \end{pmatrix}$

Mit dem gegebenen Startvektor erhält man:

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[0]})\Delta^{[0]} = \begin{pmatrix} -15 & -54 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} \cdot \Delta^{[0]} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[0]})$$

Mit der Lösung $\Delta^{[0]} = \begin{pmatrix} \frac{2}{63} \\ \frac{16}{567} \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{65}{63} \\ \frac{583}{567} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\Delta^{[1]} \approx \begin{pmatrix} -15.77131 & -57.28647 \\ 8.253968 & -9.515103 \end{pmatrix} \cdot \Delta^{[1]} = \begin{pmatrix} 0.05833573 \\ 0.00320282 \end{pmatrix} \approx -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[1]})$$

$$\boldsymbol{x}^{[2]} = \boldsymbol{x}^{[1]} + \Delta^{[1]} \approx \begin{pmatrix} 1.031149 \\ 1.027364 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[2]}) \approx \begin{pmatrix} -4.421 \times 10^{-5} \\ -5.331 \times 10^{-6} \end{pmatrix},$$

Matlab liefert die folgenden Iterierten:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1.031149486465732\,, & y_2 &= 1.027364611917862\,, \\ x_3 &= 1.031149301112460\,, & y_3 &= 1.027363890384895 \\ x_4 &= 1.031149301112562\,, & y_4 &= 1.027363890384492 \\ x_5 &= 1.031149301112562\,, & y_5 &= 1.027363890384492 \\ f_5 &= (0, 0.444089209850063 \cdot 10^{-15}) \end{aligned}$$

Abgabetermine: 19.12.-23.12.2016 oder 16.01.-20.01.17