Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 2: Skizzieren Sie für die unten angegebenen Funktionen $f_k : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,3$ einige Höhenlinien

$$f_k^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : \ f(x,y) = C\}$$

von f_k für verschiedene Werte von C

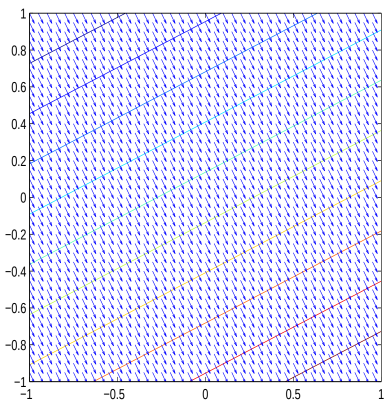
a) $f_1(x,y) = x - 2\,y,$ b) $f_2(x,y) = x\,y,$

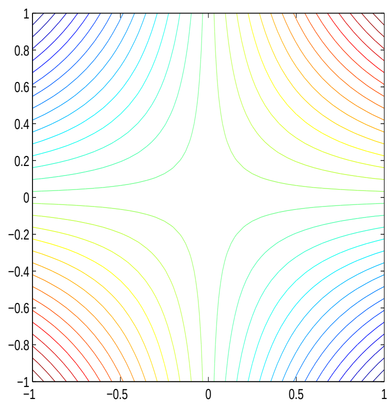
c) $f_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0)\,.$

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

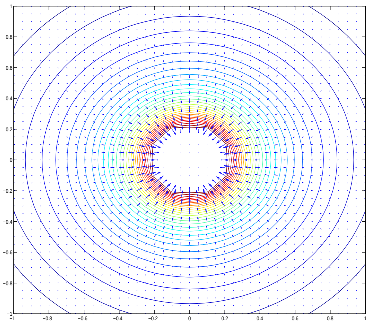
a) Höhenlinien : $x - 2y = C \longrightarrow$ Geraden $y = \frac{x-C}{2}$.

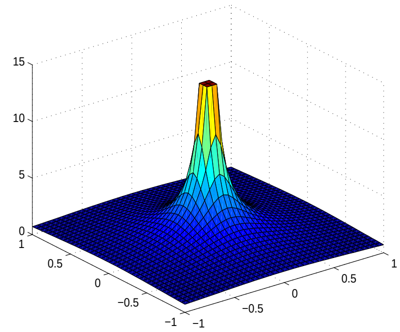
b) Die Höhenlinien zu f_2 sind Hyperbeläste, die sich aus $y = C/x$ für $x \neq 0$ bzw. $x = C/y$ für $y \neq 0$ ergeben.





c) Die Höhenlinien zu f_3 sind Kreise um den Nullpunkt. Die Funktion ist in $(0,0)$ nicht definiert. Sie strebt dort gegen ∞.




15
10
5
0
1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

Aufgabe 3:

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{(xy)^\alpha}{x^2+y^2}\,, & xy > 0\,, \\ 0\,, & xy \le 0\,. \end{cases}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f stetig im Punkt $(0,0)$?

Tipp: Polarkoordinaten!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3:

Stetigkeit: Führt man Polarkoordinaten ein, so gilt

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi,$$

Für $x \cdot y \le 0$ ist $f(x,y) = f(0,0) = 0$. Für $x \cdot y > 0$ gilt

$$f(x,y) = \tilde{f}(r,\varphi) = r^{2\alpha-2} \cdot (\sin\varphi \cdot \cos\varphi)^\alpha.$$

f ist genau dann stetig in $(0,0)$, falls für jede Folge $(r_k,\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $r_k \to 0$ auch $\tilde{f}(r_k,\varphi_k) \to f(0,0) = 0$ gilt. Sei also $(r_k,\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $r_k \to 0$. Ist $\alpha > 1$, so bleibt

$$(\sin\varphi_k \cdot \cos\varphi_k)^\alpha$$

beschränkt und

$$r_k^{2\alpha-2} \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty\,.$$

Also folgt $\tilde{f}(r_k,\varphi_k) \to 0$ für $k \to \infty$ und f ist stetig in 0.

Für $\alpha = 1$, wähle zum Beispiel speziell die Folge $(r_k,\varphi_k) = (\frac{1}{k}, \frac{\pi}{4})$. Dann gilt

$$\tilde{f}(r_k,\varphi_k) = \left(\frac{1}{k}\right)^0 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ne 0.$$

Für $\alpha < 1$ divergiert die Folge $r_k^{2\alpha-2}$.

Also ist f genau dann in $(0,0)$ stetig, wenn $\alpha > 1$ ist.

Bearbeitungstermine: 24.–28.10.06