

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 3, Hausaufgaben

**Aufgabe 1:** (3+3+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(\mathbf{x}) := -x^2 - y^2 + 2x + z$ .

- a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveauläche  $N_{\mathbf{x}^0}$  der Funktion  $f$  im Punkt  $\mathbf{x}^0 = (1, 2, 3)^T$  an, und berechnen Sie den Gradienten von  $f$  in  $\mathbf{x}^0$ .
- b) Berechnen Sie die Richtungsableitungen  $D_{\mathbf{w}^{[j]}} f(\mathbf{x}^0)$  für  $j = 1, 2, 3$ ,  
 $\mathbf{v}^{[1]} = (1, 1, 1)^T$ ,  $\mathbf{v}^{[2]} = (1, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v}^{[3]} = (1, 0, 0)^T$ .  
 und  $\mathbf{w}^{[j]} := \frac{\mathbf{v}^{[j]}}{\|\mathbf{v}^{[j]}\|}$ . Können Sie für  $j = 1, 2, 3$  entscheiden, ob es sich bei  $\mathbf{w}^{[j]}$  um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt?
- c) Berechnen Sie die Richtungsableitung  $D_{\tilde{\mathbf{v}}} f(\mathbf{x}^0)$  für  $\tilde{\mathbf{v}} = 1/\sqrt{17}(0, -4, 1)^T$ . Handelt es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung?  
 Berechnen Sie den Funktionswert im Punkt  $\mathbf{x}^0 + 2\sqrt{17}\tilde{\mathbf{v}}$ .  
 Ergibt sich da nicht ein Widerspruch?  
 Berechnen Sie nun den Funktionswert im Punkt  $\mathbf{x}^0 + \frac{\sqrt{17}}{2}\tilde{\mathbf{v}}$ .  
 Erklären Sie Ihre Ergebnisse.

**Aufgabe 2:** (6+4 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y, z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z).$$

- a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von  $f$  mit dem Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T := (0, 1, \pi)^T$ .
- b) Zeigen Sie, dass für den Betrag des Restglieds  $R_2(x, y, z) = f(x, y, z) - T_2(x, y, z)$  folgende Abschätzung gilt:

$$|R_2(x, y, z)| \leq 0.02 \quad \forall \mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq 0.1.$$

**Abgabetermine:** 21.11.- 25.11.2016 bzw. 28.11. - 2.12.2016.