Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Vektorfelder $\boldsymbol{v}^{[i]} : D \to \mathbb{R}^n, \quad n = 2$ bzw. 3

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^{[1]}(x,y) &= (x^3, y^3)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2,\\
\boldsymbol{v}^{[2]}(x,y,z) &= (xy^2 + xz^2 \,,\, yx^2 + yz^2 \,,\, zy^2 + zx^2)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3,\\
\boldsymbol{v}^{[3]}(x,y,z) &= (-y^2 \,,\, xy \,,\, -2y)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3,\\
\boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z) &= \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\z\end{smallmatrix}\right) \;; z \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie

$$\oint_C \boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z)d(x,y,z)$$

entlang des Kreises

$$c(t) = \big(\cos(t), \sin(t), 0\big) \quad t \in [0, 2\pi].$$

b) Prüfen Sie, welche der Vektorfelder $\boldsymbol{v}^{[i]}$, $i = 1,2,3,4$ Potentiale besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls jeweils ein Potential.

c) Berechnen Sie zu $v^{[1]}(x,y)$ die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c}(t) = \left(t(t-4)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\right)^T, \qquad t \in [a,b] := [0,4].$$

von $c(0)$ nach $c(4)$ zu bewegen.

Lösungsskizze Aufgabe 1:

a) Für $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{v}^{[4]}(x,y,z)d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} > dt\\
&= \int_0^{2\pi} 1\, dt\\
&= 2\pi \neq 0\,.
\end{aligned}$$

b) (i) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}^{[1]}) = 0$.
Sei ϕ ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[1]}$. Dann gilt

$$\Phi_x = x^3 \iff \Phi(x,y) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + c(y).$$

Mit diesem Φ gilt $\Phi_y = c'(y)$. Andererseits muss für jedes Potential $\Phi_y = y^3$ gelten. Also
$c'(y) \stackrel{!}{=} y^3$ z.B. $c(y) = \frac{1}{4} y^4$.
$\phi = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$ ist ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[1]}$.

(ii) Sei ϕ ein Potential für $\boldsymbol{v}^{[2]}$. Dann gilt

$$\Phi_x = xy^2 + xz^2, \quad \Phi_y = yx^2 + yz^2, \quad \Phi_z = zy^2 + zx^2.$$

$$\Phi_x = xy^2 + xz^2 \iff \Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + x^2z^2\right) + c(y,z)$$

$$\Phi_y = yx^2 + c_y(y,z) = yx^2 + yz^2 \iff c_y(y,z) = yz^2$$

$$\iff c(y,z) = \frac{1}{2}y^2z^2 + d(z) \implies \Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2\right) + d(z)$$

$$\Phi_z = zx^2 + zy^2 + d_z = zx^2 + zy^2 \implies d_z = 0 \implies d = Konst.$$

Also haben wir mit $\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$ ein Potential für $v^{[3]}$ gefunden.

(iii) Es gilt $\frac{\partial(v_1^{[3]})}{\partial y} = -2y \quad \neq \quad \frac{\partial(v_2^{[3]})}{\partial x} = y$ es gibt also kein Potential zu $\boldsymbol{v}^{[3]}$.

(iv) Es gilt zwar $\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}^{[4]}) = 0$. Hieraus lässt sich aber nicht schließen, dass $\boldsymbol{v}^{[4]}$ ein Potential besitzt. Der Definitionsbereich ist nicht einfach zusammenhängend. Aus Teil a) folgt, dass es kein Potential gibt.

c)

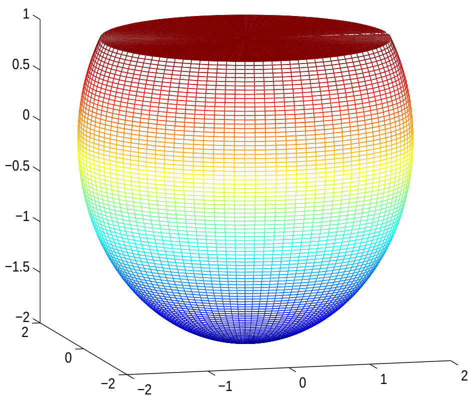
$$\int_C K(x,y)d(x,y) = \phi(c(4)) - \phi(c(0)) = \phi\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 4^3 = 64$$

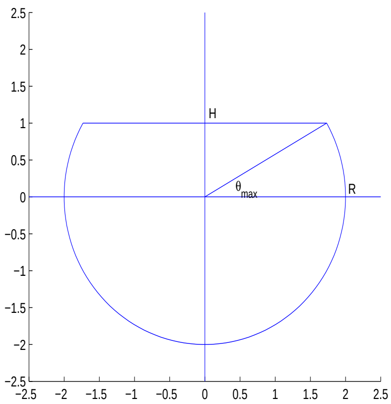
Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie die Oberfläche von

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \;\leq\; R^2, z \;\leq H \right\}$$

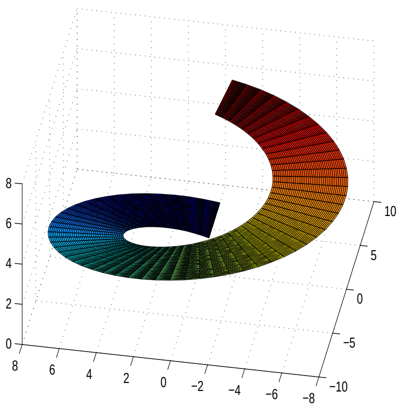
wobei H und R vorgegebene reelle Zahlen mit $0 \leq H \leq R$ seien.





b) Eine Parkhausauffahrt sei beschrieben durch

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \;\leq\; \phi \;\;\leq 2\pi,\, 4 \leq r \leq 8 \right\}.$$



Berechnen Sie die Oberfläche der Auffahrt.

Hinweis: $\displaystyle\int \sqrt{1+r^2}dr \;=\; \frac{1}{2}\left[r\sqrt{1+r^2} \;+\; \ln(r+\sqrt{1+r^2})\right] + C\,.$

Lösung 2:

a) Parametrisierung: angepasste Kugelkoordinaten

$x = R\cos(\phi)\cos(\theta)\,,\quad y = R\sin(\phi)\cos(\theta)\,,\quad z = R\sin(\theta)$

mit $\quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \arcsin(H/R)]\,.$

$$\delta p\,/\,\delta\phi \;=\; \begin{pmatrix} -R\sin(\phi)\cos(\theta) \\ R\cos(\phi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \delta p\,/\,\delta\theta \;=\; \begin{pmatrix} -R\cos(\phi)\sin(\theta) \\ -R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ R\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

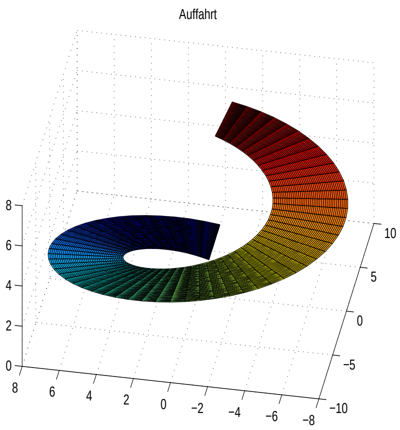
$$\delta p\,/\,\delta\phi \,\times\, \delta p\,/\,\delta\theta \;=\; R^2 \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos^2(\theta) \\ \sin(\phi)\cos^2(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \|\delta p\,/\,\delta\phi \,\times\, \delta p\,/\,\delta\theta\,\| \;=\; R^2\cos(\theta)$$

Die Oberfläche ergibt sich aus der Fläche des Deckels (Kreis mit Radius $\sqrt{R^2 - H^2}$) und dem darunterliegenden Teil der Oberfläche der Kugel:

$$\begin{aligned} F &= \pi(R^2 - H^2) \;+\; R^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(H/R)} \cos(\theta)\, d\theta d\phi \\ &= \pi(R^2 - H^2) \;+\; 2\pi R^2\; \sin(\theta)\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(H/R)} \;= \\ &= \pi(R^2 - H^2) \;+\; 2\pi R^2(1 + H/R) \;=\; 3\pi R^2 + 2\pi RH - \pi H^2 \end{aligned}$$

b) $x = r\cos(\phi)\,,\quad y = r\sin(\phi)\,,\quad z = \phi$

mit $\quad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [4, 8]\,.$



$$\delta p\,/\,\delta\phi \;=\; \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \delta p\,/\,\delta r \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta p\,/\,\delta\phi \,\times\, \delta p\,/\,\delta r \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ -r \end{pmatrix} \qquad \|\delta p\,/\,\delta\phi \,\times\, \delta p\,/\,\delta r\,\| \;=\; \sqrt{1 + r^2}$$

$$F = \int_0^{2\pi} \int_4^8 \sqrt{1 + r^2}\,dr d\phi = \pi \left[r\sqrt{1 + r^2} \;+\; \ln(r + \sqrt{1 + r^2}) \right]_4^8$$