Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) (Wiederholungsklausur 08/09, Hinze, Kiani) Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ und die Kurve $\mathbf{c}$

$$\mathbf{K}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \dfrac{x}{z} \\ \dfrac{y}{z} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t\cdot\cos(t) \\ t\cdot\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t\in[1,3]\,.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$ von $\mathbf{c}(1)$ nach $\mathbf{c}(3)$ zu bewegen.

b) (Klausur 08/09, Hinze, Kiani) Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

(ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}\,d\boldsymbol{x}\,, \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Lösungsskizze Aufgabe 1)

a) **[4 Punkte]**

$$\mathbf{K}(\mathbf{c}(t)) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) - t\cdot\sin(t) \\ \sin(t) + t\cdot\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t\in[1,3]\,.$$

$$\int_1^3 < K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt = \int_1^3 (\cos^2(t) - t\sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + t\sin(t)\cos(t) + t^2)\,dt$$

$$= \int_1^3 (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_1^3 = 2 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}\,.$$

b) (i) $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y} = 2y \quad \neq \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = y^2 \implies$ es gibt kein Potential zu $\boldsymbol{f}$.

$\phi(x,y) = xy^2$ ist ein Potential zu $\boldsymbol{g}$. [2 punkte]

(ii)

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt$$

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2\cos(t) \end{pmatrix}$$

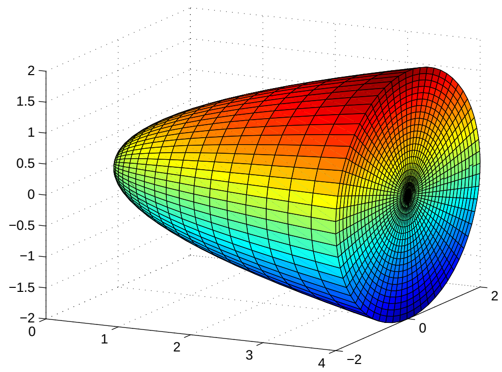
$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi} t^2(\cos t - \sin t)\, dt \\ &= t^2(\cos t + \sin t)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t(\cos t + \sin t)\, dt \\ &= 4\pi^2 - \left[\, 2t(\sin t - \cos t)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2(\sin t - \cos t) dt = 4\pi^2 + 4\pi\,. \quad \text{[3 punkte]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) > dt \\ &= \phi(\cos(2\pi), 2\pi) - \phi(\cos(0), 0) = 4\pi^2\,. \quad \text{[1 punkt]} \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Körper

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \le 4\,,\, y^2 + z^2 \le x \le 4 \right\}.$$



und das Vektorfeld

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$

b) Der Körper K wird berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein nicht ebenes Flächenstück M. Geben Sie eine Parametrisierung für das ebene Flächenstück D an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das ebene Flächenstück D.

d) Wie groß ist nach den Teilen a) und c) der Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das nicht ebene Flächenstück M.

Lösung 2:

Parametrisierung von K:

$x = x\,,\quad y = r\cos(\phi)\,,\quad z = r\sin(\phi),\qquad r \in [0,2],\ \phi \in [0,2\pi],\ x \in [r^2,4]\,.$

a) $\operatorname{div} f(x,y,z) = 3\,.$

$$\int_K \operatorname{div}(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 3 \cdot r\, dx\, d\phi\, dr$$
$$= 6\pi \int_0^2 r(4-r^2)\, dr = 24\pi.$$

b) Parametrisierung von D:

$$p(r,\,\phi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} \text{ mit } \qquad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2]\ .$$

c) Der Fluss durch D ergibt wie folgt:

$$\delta p\,/\,\delta\phi \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \delta p\,/\,\delta r \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta p}{\delta r} \times \frac{\delta p}{\delta \phi} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad <\; f(p(r,\phi)), \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 4+2r^2 \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > = 4r + 2r^3$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} 4r + 2r^3 d\phi\, dr = 2\pi \left[2r^2 + \frac{r^4}{2} \right]_0^2 = 32\pi$$

d) Nach Gauß gilt:

Gesamtfluss durch den Rand von K

$=$ Fluss durch D + Fluss durch M $= \displaystyle\int_K \operatorname{div}(x,y,z)\, d(x,y,z)$

Damit erhält man für den Fluss durch die gewölbte Fläche M nach Teil a) und b):

$24\pi \;-\; 32\pi \;=\; -8\pi\,.$