Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

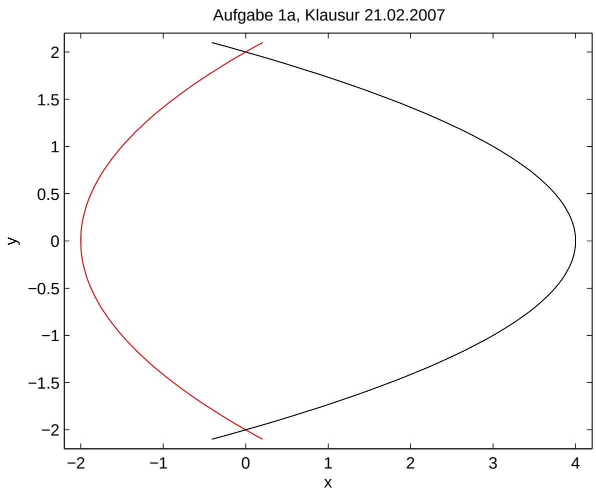
Aufgabe 1:

Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{y^2}{2} - 2 \,\le\, x \,\le\, 4 - y^2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Menge D und bestimmen Sie den Schwerpunkt von D bei homogener Dichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho = 2$.

Lösungsskizze für Aufgabe 1:



Schnittpunkte der beiden Parabeln:

$$\frac{y^2}{2} - 2 \,=\, 4 - y^2 \iff y^2 - 4 \,=\, 8 - 2y^2 \iff y = \pm 2\,.$$

Wie man der Skizze entnimmt gilt

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \,\le\, y \,\le\, 2, \frac{y^2}{2} - 2 \,\le\, x \,\le\, 4 - y^2 \right\}.$$

Zur Berechnung des Schwerpunktes, rechnet man zunächst die Masse M aus.

$$M = \int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \rho\, dx\, dy = 2 \int_{-2}^{2} 4 - y^2 - \frac{y^2}{2} + 2\, dy$$

$$= 2 \left[-\frac{y^3}{2} + 6y \right]_{-2}^{2} = 4(-4 + 12) = 32.$$

Für die y–Komponente des Schwerpunktes gilt aus Symmetriegründen : $y_s = 0$.

Für die x–Komponente des Schwerpunktes erhält man

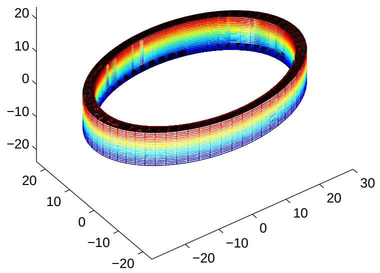
$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{M} \int_{-2}^{2} \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \rho\, x\, dx\, dy = \frac{1}{M} \int_{-2}^{2} 2 \cdot \frac{1}{2} \left((4-y^2)^2 - \frac{(y^2-4)^2}{4} \right) dy \\
&= \frac{1}{16} \int_{-2}^{2} \frac{3}{8} (4-y^2)^2\, dy = \frac{3}{8 \cdot 16} \left[16y - \frac{8}{3} y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-2}^{2} \\
&= \frac{3}{8 \cdot 8} \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{3}{2} - 1 + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei das elliptische Rohrstück

$$R \subset \mathbb{R}^3 \,, \quad R : 81 \leq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 100, \quad -5 \leq z \leq 5 \,.$$

Das Rohrstück habe die Konstante Dichte ρ .



Berechnen Sie das Volumen, die Masse und das Trägheitsmoment des Rohrstücks bzgl. der $y-$ Achse mittels Integration. Verwenden Sie elliptische Zylinderkoordinaten

Hinweis: $\cos^2(\phi) = \frac{\cos(2\phi)+1}{2}$.

Lösungsskizze zu 2:

Transformation:

$$x = 3r\cos(\varphi) \,, \; y = 2r\sin(\varphi) \,, \; z = z \,.$$

Für die Jacobi-Matrix J der Koordinatenransformation gilt

$$\det \boldsymbol{J} = \det \begin{pmatrix} 3\cos(\varphi) & -3r\sin(\varphi) & 0 \\ 2\sin(\varphi) & 2r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6r \,.$$

Für die Parameter gilt: $r \in [9, 10]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [-5, 5]$. Für das Volumen erhält man daher

$$V = \int_9^{10} \int_{-5}^{5} \int_0^{2\pi} 6r \, d\varphi \, dz \, dr = 120\pi \int_9^{10} r dr = 60\pi(100-81) = 1140\pi \,.$$

Für die Masse gilt $M = V \cdot \rho = 1140\pi \, \rho$.

Für den Abstand d des Punktes $(x, y, z)^T$ zur $y-$ Achse gilt: $d^2 = x^2 + z^2$. Für das gesuchte

Trägheitsmoment also:

$$
\begin{aligned}
\theta_y &= \int_9^{10} \int_{-5}^{5} \int_0^{2\pi} \rho(9r^2\cos^2(\varphi) + z^2)\, 6r\, d\varphi\, dz\, dr \\
&= 6\rho \int_9^{10} \int_{-5}^{5} \int_0^{2\pi} 9r^3 \left(\frac{\cos(2\varphi)+1}{2}\right) + rz^2\, d\varphi\, dz\, dr \\
&= 6\rho \int_9^{10} \int_{-5}^{5} \left[\left(\frac{9r^3}{2} + z^2 r\right)\varphi\right]_0^{2\pi} dz\, dr \;=\; 6\rho \int_9^{10} \int_{-5}^{5} 9r^3\pi + 2z^2 r\pi\, dz\, dr \\
&= 6\rho\cdot\pi \int_9^{10} 90r^3 + 2r\left[z^3/3\right]_{-5}^{5} dr \;=\; 6\rho\cdot\pi\left(\frac{90}{4}(10^4 - 9^4) + \frac{250}{3}(100-81)\right) \\
&= \rho\cdot 1.488377643527968\cdot 10^6.
\end{aligned}
$$

Abgabetermine: 12.01.-16.01.2015