Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Gesucht sind die Minima von} & f(x,y) = 2 - x + \frac{4}{9}y \\ \text{unter der Nebenbedingung} & g(x,y) = 25 - 9x^2 - y^2 = 0\,. \end{array} \tag{1}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Bemerkung: Die Aufgabe kann natürlich auch durch Elimination einer der Variablen gelöst werden. Hier soll aber an einem einfachen Beispiel die neu eingeführte Lösungsmethode geübt werden.

Lösung zur Aufgabe 1:

Regularitätsbedingung: $\operatorname{grad} g(x,y) = (-18x,\, -2y) \neq (0,0)^T$ ist auf der zulässigen Menge erfüllt, da $(0,0)$ kein zulässiger Punkt ist.

Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$$\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} g(x,y) = 0.$$

Also haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -1 + \lambda\cdot(-18x) &= 0 \Longrightarrow \lambda \neq 0 \wedge x = -\tfrac{1}{18\lambda}\,, \\ \tfrac{4}{9} + \lambda\cdot(-2y) &= 0 \Longrightarrow \lambda \neq 0 \wedge y = \tfrac{2}{9\lambda}\,, \\ 25 - 9x^2 - y^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Setzt man die Ergebnisse aus den ersten zwei Zeilen in die letzte Zeile an, so folgt:

$$\begin{aligned} 25 - \frac{9}{18^2\lambda^2} - \frac{2^2}{9^2\lambda^2} = 0 \Longrightarrow 25 &= \frac{9+4\cdot 4}{18^2}\cdot\frac{1}{\lambda^2} \\ 25\lambda^2 &= \frac{25}{18^2} \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{18} \end{aligned}$$

Wir erhalten also zwei Lösungen:

$\lambda_1 = \frac{1}{18}$, $x_1 = -\frac{1}{18\lambda_1} = -1$, $y_1 = \frac{2}{9\lambda_1} = 4$

und

$\lambda_2 = -\frac{1}{18}$, $x_2 = -\frac{1}{18\lambda_2} = 1$, $y_2 = \frac{2}{9\lambda_2} = -4$.

Die zulässige Menge ist kompakt. Minimum und Maximum werden angenommen. Die einzigen Kandidaten sind P_1 und P_2.

$f(P_1) = 2 + 1 + \frac{16}{9}$, $\qquad f(P_2) = 2 - 1 - \frac{16}{9}$.

Das einzige lokale Minimum (und damit das globale Minimum) auf der zulässigen Menge liegt in P_2.

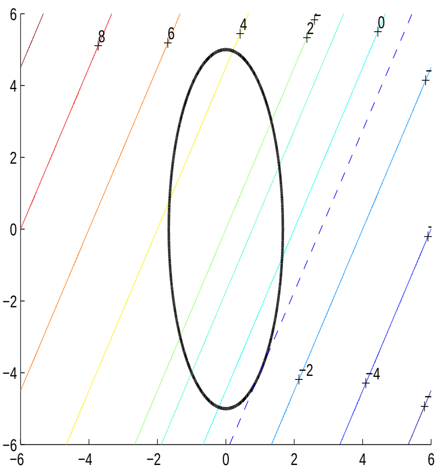
Alternativ: Für die Hessematrix rechnet man:

$$H_{x,y}F(x, y\,; \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} -18\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Diese ist für λ_1 negativ definit und für λ_2 positiv definit. Also liegt im Punkt

$P_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Maximum vor und im Punkt

$P_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein Minimum.



Aufgabe 2:

Gegeben sei die Minimierungsaufgabe

$$f(x, y, z) \;:=\; 2x \;+\; y \;+\; z \;=\; \text{min!}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g(x, y, z) \;&:=\; x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;= 9. \\ h(x, y, z) \;&:=\; x^2 \;+\; (y \;-\; z)^2 \;= 1. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 \;=\; (1, 2, 2)^T$ zusammen mit geeigneten Multiplikatoren ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion ist.

b) Zeigen Sie, dass im Punkt $\boldsymbol{x}_0 \;=\; (1, 2, 2)^T$ ein lokales Maximum der Funktion f unter den gegebenen Nebenbedingungen vorliegt. Überprüfen Sie dazu die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Lösungsskizze:

a) Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} 2 \;+\; \lambda \cdot 2x \;+\; \mu \cdot 2x \;&=\; 0 \\ 1 \;+\; \lambda \cdot 2y \;+\; \mu \cdot 2(y - z) \;&=\; 0 \\ 1 \;+\; \lambda \cdot 2z \;+\; \mu \cdot (-2(y - z)) \;&=\; 0 \\ x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;&= 9 \\ x^2 \;+\; (y \;-\; z)^2 \;&= 1 \end{aligned}$$

Für $x_0 = (1, 2, 2)^T$ lautet das System

$$\begin{aligned} 2 \;+\; 2\lambda \;+\; 2\mu \;&=\; 0 \\ 1 \;+\; 4\lambda \cdot \;+ \mu \cdot 0 \;&=\; 0 \\ 1 \;+\; 4\lambda \cdot \;+ \mu \cdot 0 \;&=\; 0 \\ 1 \;+\; 4 \;+\; 4 \;&= 9 \\ 1 \;+\; (0)^2 \;&= 1 \end{aligned}$$

Das System ist für $\lambda \;=\; -\frac{1}{4}$ und $\mu \;=\; -\frac{3}{4}$ erfüllt.

b) Die zu untersuchende Hessematrix ist

$$H(\lambda, \mu) \;=\; \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda + \mu) & -2\mu \\ 0 & -2\mu & 2(\lambda + \mu) \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $x_0 = (1, 2, 2)^T$ zusammen mit den Multiplikatoren $\lambda \;=\; -\frac{1}{4}$ und $\mu \;=\; -\frac{3}{4}$, also

$$H \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Aus dem Satz von Gerschgorin (bekannt aus Lineare Algebra) folgt, dass kein Eigenwerte von H größer als $-2 + \frac{3}{2}$ sein kann.

Alternativ : $\tilde{\lambda}_1 = -2$ (direkt auf der Diagonalen ablesbar),

$$(-2 - \tilde{\lambda})^2 - (\frac{3}{2})^2 = 0 \Longrightarrow \tilde{\lambda}_{2,3} = -2 \pm \frac{3}{2}.$$

Alle Eigenwerte sind negativ. Es handelt sich also um ein lokales Maximum.

Bearbeitungstermine: 15.12.-19.12.2014