Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske, Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben sei $g(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0\,.$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $g(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0)^T := (2,-2)^T$ nach y aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $f(x)$ mit $f(2) = -2$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x,y) = 0 \iff y = f(x)\,.$$

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion f aus Teil a) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2\,.$ *(Hinweis : implizite Differentiation)*

c) Sei T_2 das Polynom aus Teil b). Berechnen Sie $T_2(2.1)$ und $g(2.1, T_2(2.1))$. Alternativ: Skizzieren Sie T_1, T_2 und f. Letzteres kann man in Matlab wie folgt erreichen:

Nach geeigneter Definition von x und y

```
z=  x.^4 +y.^4 +8*x.*y ;
contour(x,y,z,[0 0])
```

Lösungsskizze Aufgabe 1:

a) $g(2,-2) = 0\,.$

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 8y \\ 4y^3 + 8x \end{pmatrix}^T \implies Jg(2,-2) = \begin{pmatrix} 32-16 \\ -32+16 \end{pmatrix}^T \implies$$

In der Nähe von $(2,-2)^T$ kann man nach y oder nach x auflösen.

b) $T_2(x;2) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2} f''(2)(x-2)^2$

Wir brauchen noch : $f'(2)$, $f''(2)$.

$$f'(x) = -g_x/g_y = -\frac{4x^3+8y}{4y^3+8x} \implies f'(2) = -\frac{16}{-16} = 1\,.$$

Alternativ : implizites Differenzieren

$$g(x, y(x)) = x^4 + (y(x))^4 + 8xy(x) = 0$$

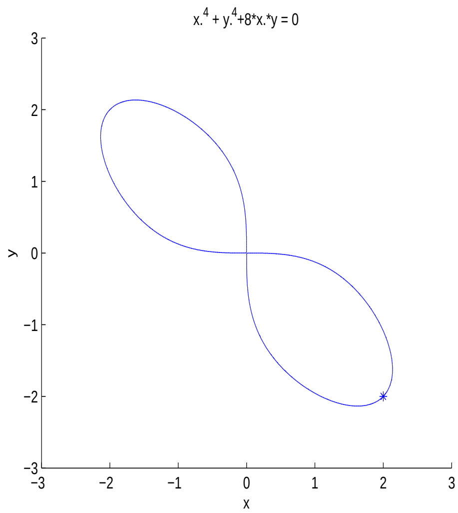
$$g'(x, y(x)) = 4x^3 + 4y^3y' + 8y + 8xy' = (4x^3 + 8y) + (4y^3 + 8x)y' = 0$$

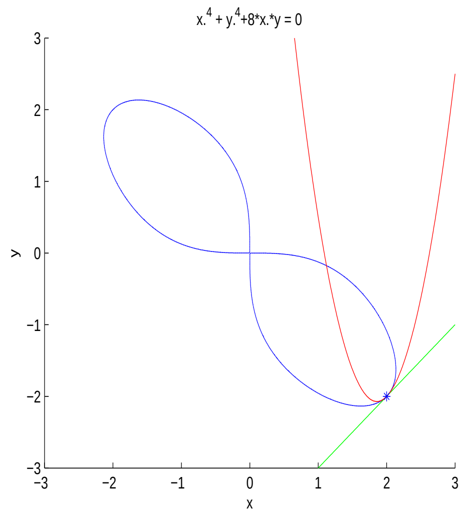
$$\Longrightarrow y'(x) = -\frac{4x^3 + 8y}{4y^3 + 8x}$$

$$g''(x, y(x)) = 12x^2 + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' + 8y' + 8y' + 8xy'' = 0$$

$$g''(2, y(2)) = 48 + 48 - 32y''(2) + 8 + 8 + 16y''(2) = 0 \Longrightarrow y''(2) = -\frac{112}{-16} = 7\,.$$

$$T_2(x; 2) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{1}{2}y''(2)(x-2)^2 = -2 + (x-2) + \frac{7}{2}(x-2)^2$$





c)

```
X=1:.01:3 ;
Y=-3:.2:3;
[x,y]=meshgrid(X,Y);
z= x.^4 + y.^4+8*x.*y ;

hold on
contour(x,y,z,[0 0],'b')

 t1=-2+ (X-2);
plot(X,t1,'g')
t2=t1+(7/2)*(X-2).^2;
plot(X,t2,'r')
 xlabel('x')
ylabel('y')
 title('x.^4 + y.^4+8*x.*y = 0')
```

Aufgabe 2: (Etwas anspruchsvoller!) Das folgende nichtlineare Gleichungssystem taucht im Zusammenhang mit der Diskretisierung einer exothermen Reaktion auf:

$$2u_1 - u_2 = \lambda \cosh(u_1)$$

$$2u_2 - u_1 = \lambda \cosh(u_2)$$

wobei $u_1, u_2, \lambda \in \mathbb{R}$ gelte.

Man ist besonders an maximalen λ–Werten und sogenannten Umkehr– bzw. Verzweigungspunkten (s. unten) interessiert.

Offensichtlich wird das System durch $(\lambda_0, (u_1)_0, (u_2)_0) = (0, 0, 0)$ gelöst.

a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $(-\epsilon, \epsilon)$ von $\lambda_0 = 0$ gibt, so dass das Gleichungssystem für alle $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$ eine in einer Umgebung von $(0, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ eindeutige, von λ abhängige Lösung $(u_1(\lambda), u_2(\lambda))^T$ mit $(u_1(0), u_2(0))^T = (0, 0)^T$ besitzt, die stetig nach λ differenzierbar ist. (Zeigen Sie also die Auflösbarkeit nach $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ nach dem Satz über implizite Funktionen)

b) Zeigen Sie, dass der lokale Lösungsast aus a) sich auch durch u_1 oder u_2 parametrisieren lässt. (Auflösbarkeit nach zwei beliebigen Variablen)

c) Berechnen Sie eine Approximation von $(u_1(\lambda), u_2(\lambda))^T$ für kleine $|\lambda|$–Werte, indem Sie durch Differenzieren der Gleichungen

$$2u_1(\lambda) - u_2(\lambda) = \lambda \cosh(u_1(\lambda))$$

$$2u_2(\lambda) - u_1(\lambda) = \lambda \cosh(u_2(\lambda))$$

die Ableitungen $(u_1(\lambda))', (u_2(\lambda))'$ bei $\lambda = 0$ berechnen und die Taylorpolynome ersten Grades für $u_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ aufstellen.

d) Motiviert durch Teil c) und die Symmetrien im Gleichungssystem liegt die Vermutung nahe, dass für den betrachteten Lösungszweig $u_1(\lambda) = u_2(\lambda)$ gilt. Überzeugen Sie sich davon, dass im Fall $u_1 = u_2$ das System auf die Gleichung

$$g(\lambda, u) := u - \lambda \cosh(u) = 0$$

reduziert werden kann. Diese kann eindeutig nach λ auflöst werden und liefert

$$\lambda(u) = \frac{u}{\cosh(u)}.$$

Zeigen Sie, dass $(\lambda(u), u, u)^T$ in der Nähe von Null tatsächlich ein Lösungsast des nichtlinearen Gleichungssystems ist, und dass dieser Ast mit dem in Teil a) nach λ parametrisierten Ast (nahe Null) übereinstimmen muss.

e) Berechnen Sie Näherungen für die λ–Umkehrpunkte. In jedem dieser Punkte hat die durch $g(\lambda, u) = 0$ gegebene Kurve eine vertikale Tangente, sofern man wie üblich das Koordinatensystem so wählt, dass die erste Variable horizontal und die zweite vertikal abgetragen wird. Stellen Sie die Bestimmungsgleichung für die entsprechenden u–Werte auf, und benutzen Sie z.B. ein Fixpunktverfahren mit Startwert $u = 1$.

Lösung zu 2:

a) [**2 Punkte**]

$$f(\lambda, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 2u_1 - u_2 - \lambda\cosh(u_1) \\ 2u_2 - u_1 - \lambda\cosh(u_2) \end{pmatrix},$$

$$Jf\boldsymbol{u}(\lambda, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 2 - \lambda\sinh(u_1) & -1 \\ -1 & 2 - \lambda\sinh(u_2) \end{pmatrix},$$

$$Jf_u(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \text{System nahe (0,0,0) nach } u_1, u_2 \text{ auflösbar.}$$

Die Behauptungen aus Teil a) folgen unmittelbar aus dem Satz über implizite Funktionen.

b) [**1 Punkt**]

$$Jf(\lambda, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -\cosh(u_1) & 2 - \lambda\sinh(u_1) & -1 \\ -\cosh(u_2) & -1 & 2 - \lambda\sinh(u_2) \end{pmatrix},$$

$$Jf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Je zwei Spalten der Jakobimatrix bilden eine Matrix mit Rang zwei. Das System ist lokal nach jedem Paar der Variablen auflösbar.

c) [**2 Punkte**] Differentiation nach λ ergibt

$$\begin{aligned} 2u_1'(\lambda) - u_2'(\lambda) &= \cosh(u_1(\lambda)) + \lambda\sinh(u_1(\lambda))u_1'(\lambda) \\ 2u_2'(\lambda) - u_1'(\lambda) &= \cosh(u_2(\lambda)) + \lambda\sinh(u_2(\lambda))u_2'(\lambda) \end{aligned}$$

Für (0,0,0) also

$$\begin{aligned} 2u_1'(0) - u_2'(0) &= 1 \\ 2u_2'(0) - u_1'(0) &= 1 \qquad u_1'(0) = u_2'(0) = 1. \end{aligned}$$

Damit erhält man als lineare Approximationen

$$\begin{aligned} u_1(\lambda) &\approx u_1(0) + u_1'(0)\,\lambda = \lambda, \\ u_2(\lambda) &\approx u_2(0) + u_2'(0)\,\lambda = \lambda. \end{aligned}$$

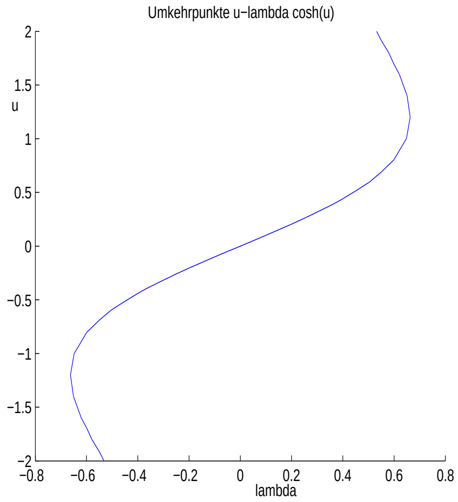


Abbildung 1: *Umkehrpunkte*

d) **[3 Punkt]** Für $u_1 = u_2 = u$ gehen beide urspröglichen Gleichungen über in

$$2u - u = \lambda \cosh(u) \iff g(\lambda, u) := u - \lambda \cosh(u) = 0 \implies \lambda(u) = \frac{u}{\cosh(u)}$$

Das ursprüngliche System lautet für $(\frac{u}{\cosh(u)}, u, u)$

$$f(\lambda(u), u, u) = f(\frac{u}{\cosh(u)}, u, u) = \begin{pmatrix} 2u - u - \lambda(u)\cosh(u) \\ 2u - u - \lambda(u)\cosh(u) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u - \dfrac{u}{\cosh(u)} \cosh(u) \\ u - \dfrac{u}{\cosh(u)} \cosh(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\lambda(u), u, u)$ definiert also nahe (0,0,0) einen Lösungsast. Da der Lösungsast nahe Null aber eindeutig ist, muss die hier gefundene Lösung mit der Lösung aus Teil a) übereinstimmen.

e) **[2 Punkte]** Vertikale Tangenten an g : $g_u = g = 0$ und $g_\lambda = -\cosh(u) \neq 0$.
$g_u = 1 - \lambda \sinh(u)$ und $\lambda = u/\cosh(u)$ liefern für $u \neq 0$ die Bedingung

$$\cosh(u) - u \sinh(u) = 0 \iff u = \frac{\cosh(u)}{\sinh(u)}$$

Fixpunktverfahren mit $u_0 = 1$ ergibt $u_9 = 1.1998$, $u_{10} = 1.1996$, $\lambda_{max} \approx 0.6627$. Wegen der Symmetrien liegt auch in der Nähe von $-u_{10}, -\lambda_{max}$ ein Umkehrpunkt vor. Weitere Umkehrpunkte gibt es nicht, denn

$(\cosh(u) - u \sinh(u))' = -u \cosh(u) < 0$ für alle $u > 0$. D.h. es gibt keine weiteren Nullstellen im positivem Bereich. Aus der Symmetrie folgt der Rest.