Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1) Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \;=\; x\cdot\arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Zeigen Sie, dass für das Restglied $R_2(x,y) \,=\, f(x,y) \,-\, T_2(x,y)$ im Bereich $|x| \le 0.1\,,\ |y| \le 0.1$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|R_2(x,y)| \;\le\; 0.006\,.$$

Hinweise: $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\arctan(0) \,=\, 0\,.$

Lösung:

a) **[4 Punkte]**

	Wert in $(0,0)^T$
$f(x,y) \;:=\; x\cdot\arctan(y) \,+\, e^{x+y} \,-\, 1$	0
$f_x(x,y) \;=\; \arctan(y) \,+\, e^{x+y}$	1
$f_y(x,y) \;=\; \frac{x}{1+y^2} \,+ e^{x+y}$	1
$f_{xx}(x,y) \;=\; e^{x+y}$	1
$f_{xy}(x,y) \;=\; \frac{1}{1+y^2} \,+ e^{x+y}$	2
$f_{yy}(x,y) \;=\; \frac{-2xy}{(1+y^2)^2} \,+ e^{x+y}$	1

$$T_2(x,y) = \, x \,+\, y + \frac{1}{2}\,x^2 \,+\, 2xy \,+\, \frac{1}{2}\,y^2\,.$$

b) [**4 Punkte**]

$$
\begin{array}{rcll}
 & & & \text{maximaler Betrag} \\
\hline
|f_{xxx}(x,y)| &=& |e^{x+y}| & \le\; e^{0.2} \\
|f_{xxy}(x,y)| &=& |e^{x+y}| & \le\; e^{0.2} \\
|f_{xyy}(x,y)| &=& \left|\dfrac{-2y}{(1+y^2)^2} + e^{x+y}\right| & \le\; 0.2 + e^{0.2} \\
|f_{yyy}(x,y)| &=& \left|-2x \cdot \dfrac{(1+y^2)^2 - 4y^2(1+y^2)}{(1+y^2)^4} + e^{x+y}\right| & \le\; 0.3 + e^{0.2}
\end{array}
$$

Für die letzte Ableitung rechnet man zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
\left|2x \cdot \frac{(1+y^2)^2 - 4y^2(1+y^2)}{(1+y^2)^4}\right| &\le 0.2\left(\frac{1}{(1+y^2)^2} + \frac{4|y|^2}{(1+y^2)^3}\right) \\
&\le 0.2\left(1 + \frac{0.04}{1}\right) \;=\; 0.208\,.
\end{aligned}
$$

Insgesamt kann als obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen
$C = 3 \;>\; 2.3 \;=\; \sqrt{4} + 0.3 \;>\; \sqrt{e} + 0.3 \;>\; e^{0.2} + 0.208$
gewählt werden. Mit der üblichen Abschätzung gilt dann:

$$
|R_2(x,y)| \;\le\; \frac{2^3}{3!} \cdot C \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_\infty^3 \;\le\; \frac{8}{6} \cdot 3 \cdot 0.1^3 \;=\; 0.004 \;<\; 0.006\,.
$$

Bemerkung: Wer $e^{0.2}$ mit 3 abschätzt und $C = 4$ wählt, erhält die Schranke 0.00533333.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und prüfen Sie, ob diese Minima, Maxima oder Sattelpunkte sind:

a) [Klausur 2009] $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad c = 2014,$$

b) $g(x,y) := x^2 - xy - x + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3}$.

Lösung zu 2:

a)

$$f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-4,12)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2014 = -x^2+4xy-2y^2-4x+12y+2014\,.$$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x+4y-4 = 0 \iff x = 2y-2. \\ f_y(x,y) &= 4x-4y+12 = 8y-8-4y+12 = 0 \\ &\iff y = -1 \implies x = -4. \end{aligned}$$

Die Hessematrix $\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \implies \det(\boldsymbol{H}(x,y)) = 8 - 16 < 0$ ist indefinit. Also liegt ein Sattelpunkt vor.

b) Für g erhält man $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y-1 \\ -x+y^3+y^2 \end{pmatrix}$

$$2x-y-1 = 0 \iff x = \frac{y+1}{2}$$

$$-x+y^3+y^2 = -\frac{y+1}{2} + y^2(y+1) = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)(y+1) = 0$$

$$\implies y \in \{-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

Damit erhält man drei stationäre Punkte:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P}_{2,3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Für die Hessematrix rechnet man:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) &= 2 \\ g_{xy}(x,y) &= g_{yx}(x,y) = -1 \\ g_{yy}(x,y) &= 3y^2+2y \end{aligned}$$

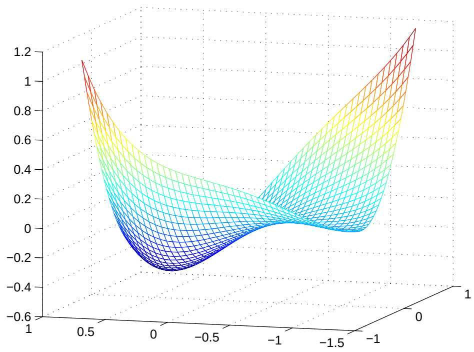
Im den Punkten $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ erhält man die Hessematrizen

$$\boldsymbol{H}^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[1]}_{11} = 2 > 0, \det \boldsymbol{H}^{[1]} = 2 - 1 > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[1]} \text{ positiv definit,}$$

$$\boldsymbol{H}^{[2]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} - \sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \boldsymbol{H}^{[1]} = 3 - 2\sqrt{2} - 1 < 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[2]} \text{ ist indefinit,}$$

$$\boldsymbol{H}^{[3]} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} + \sqrt{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[3]}_{11} = 2 > 0, \det \boldsymbol{H}^{[1]} = 3 + 2\sqrt{2} - 1 > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{H}^{[3]} \text{ positiv definit.}$$

In $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ liegen Minima vor. $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{8}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist ein Sattelpunkt.



Bearbeitungstermine: 17.11.-21.11.2014