Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**
Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben sind die folgenden Funktionen

$$f_k : [-1,1] \ \text{x} \ [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad k = 1,2,3,4$$

a) $f_1(x,y) = x - 2\,y,$ b) $f_2(x,y) = x\,y,$

c) $f_3(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y) \neq (0,0),$ d) $f_4(x,y) = \cos(2\pi y)\,\sin(\pi x)\,.$

a) Bestimmen Sie die Gradienten der Funktionen.

b) Zeichnen Sie für f_1 und f_3 einige Linien bzw. Kurven entlang derer die jeweilige Funktion konstant ist. Das sind die sogenannten Höhenlinien. Heften Sie an vier beliebigen Punkten Ihrer Höhenlinien die Richtung der Gradienten in diesen Punkten an. Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

Lösungshinweise zur Aufgaben 1:

a) (i) $\operatorname{grad} f_1(x,y) = (1,-2)\,.$

(ii) $\operatorname{grad}\ f_2(x,y) = (y,x)\ .$

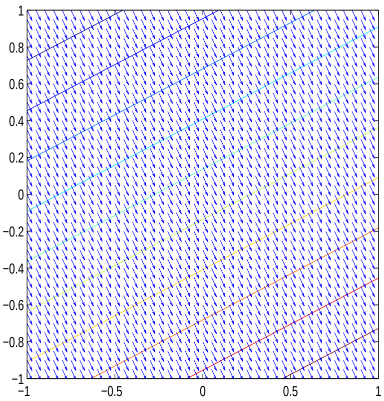
(iii) $$\operatorname{grad}\ f_3(x,y) = \frac{1}{2}\left(\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)_x,\ \left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)_y\right) = \frac{-1}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,(x,\,y)\ .$$

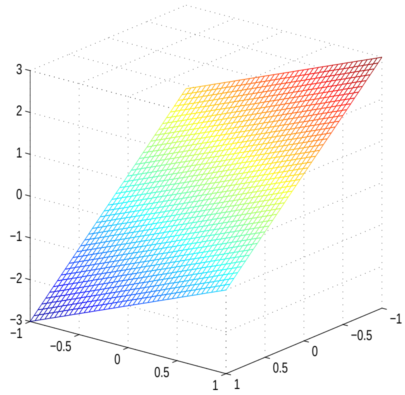
(iv) $\operatorname{grad}\ f_4(x,y) = \pi\cdot(\cos(2\pi y)\,\cos(\pi x),\ -2\,\sin(2\pi y)\,\sin(\pi x))\,.$

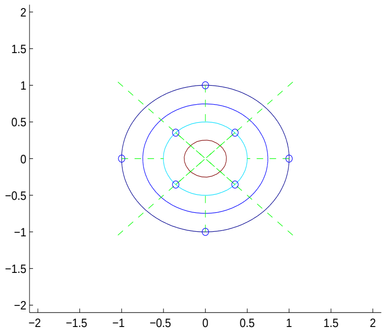
b) $f_1(x,y) = x - 2\,y = c \iff y = \frac{x}{2} - \frac{c}{2}$

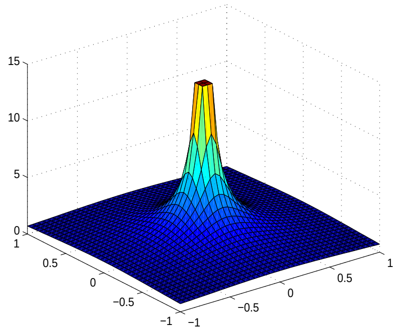
Die Höhenlinien sind Geraden mit Steigung $\frac{1}{2}$.

$f_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ist offensichtlich genau dann konstant, wenn $x^2+y^2 = K =: r^2$ gilt. Die Höhenlinien sind Kreise um den Ursprung.









Die Gradienten scheinen orthogonal zu den Höhenlinien zu sein. Sind sie auch! Wird später bewiesen

Aufgabe 2: Die Funktion

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]$$

beschreibt näherungsweise die Auslenkung des Punktes $x \in [0, L]$ einer schwingenden Saite der Länge L zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit den Anfangsdaten $u(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$.

a) Bestimmen Sie die Randdaten $u(0,t)$ und $u(L,t)$.

b) Zeigen Sie, dass u die Wellengleichung $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad$ erfüllt.

c) Versuchen Sie die Form der Saite für $t = 0, \frac{L}{6c}, \frac{L}{4c}, \frac{L}{3c}, \frac{L}{2c}, \frac{L}{c}$ zu skizzieren.
Hinweis: $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$.

Lösung zur Aufgabe 2:

a) $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

b) Ableitungen ausrechnen und einsetzen!

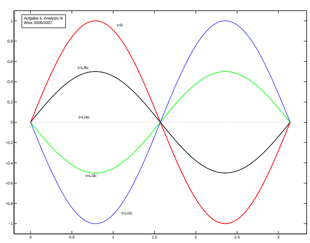
c) $$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]$$

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+0)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-0)\right)\right] = \sin\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right).$$

$$\begin{aligned} u(x,\frac{L}{6c}) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+\frac{L}{6})\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-\frac{L}{6})\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{L}+\frac{2\pi}{6})\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}-\frac{2\pi}{6}\right)\right] \\ &= \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}u(x,0) \end{aligned}$$

Analog rechnet man

$u(x,\frac{L}{4c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\frac{2\pi}{L}\cdot c\cdot\frac{L}{4c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$u(x,\frac{L}{3c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}u(x,0)$
$u(x,\frac{L}{2c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\pi) = -u(x,0)$



$u(x,\frac{L}{c}) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(2\pi) = u(x,0)$.

Bearbeitungstermine: 20.10–24.10.14