

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Sei f das Vektorfeld $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$, c_1 die Kurve mit der Parametrisierung

$$c_1(t) = (t, \sin(t)) \quad t \in [0, \pi]$$

und c_2 der mathematisch positiv orientierte Rand des Rechtecks

$$R = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 2]\} = [0, 1] \times [0, 2].$$

- (i) Besitzt f ein Potential?
(ii) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Kurvenintegrale

$$\int_{c_i} f(x, y) d(x, y).$$

- (iii) Berechnen Sie den Fluß von f aus R heraus.

- b) Gegeben $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x + 1 \\ z + 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ze^x \cos y \\ -ze^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix}$$

sowie die Kurven

$$\mathbf{c}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \int_{\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2} \mathbf{g} d\mathbf{x}.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Körper $K := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 5 - x + y, \}$
und das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (xz, yz, xyz)^T$.

- a) Skizzieren Sie K und geben Sie Parametrisierungen für die drei glatten Flächenstücke F_1 , F_2 und F_3 an, die K beranden.
- b) Berechnen Sie den Fluß von \mathbf{f} durch die Flächenstücke F_1 , F_2 und F_3
- c) Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_K \operatorname{div} \mathbf{f} \, d\mathbf{x}$.