Aufgabe 1:

a) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades für die Funktion

$$f(x,y) = (y + \cos y)\sin x$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

b) Man berechne und klassifiziere alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^4 - y^2 \,.$$

Lösung:

a)
$$f(x,y) = (y+\cos y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 1$$
$$f_x(x,y) = (y+\cos y)\cos x \quad \Rightarrow \quad f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 0$$
$$f_y(x,y) = (1-\sin y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 1$$
$$f_{xx}(x,y) = -(y+\cos y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -1$$
$$f_{xy}(x,y) = (1-\sin y)\cos x \quad \Rightarrow \quad f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 0$$
$$f_{yy}(x,y) = -\cos y \sin x \quad \Rightarrow \quad f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},0\right) = -1$$

$$\begin{aligned}
T_2\left(x,y;\frac{\pi}{2},0\right) &= f\left(\frac{\pi}{2},0\right) + f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right)y \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y + f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)y^2\right) \\
&= 1 + y - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{2}
\end{aligned}$$

b) grad $f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x, 2y(2y^2-1) = (0,0)$

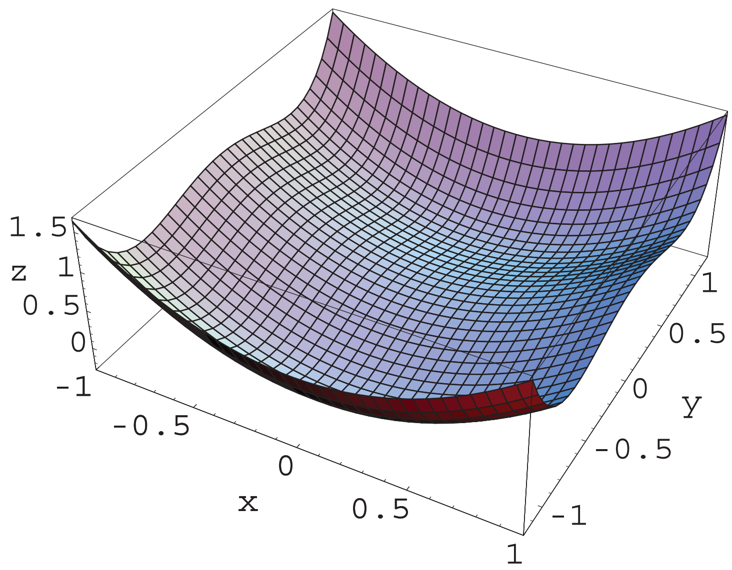
$\Rightarrow\; x = 0$ und $y = 0 \vee y = 1/\sqrt{2} \;\vee\; y = -1/\sqrt{2}$

stationäre Punkte: $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2-2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit. Damit ist $\boldsymbol{P}_1$ Sattelpunkt.

$\boldsymbol{H}f(0,\pm 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ist positiv definit. Damit sind $\boldsymbol{P}_{2,3}$ lokale Minima.



(ohne Wertung) **Bild 1 b):** $f(x,y) = x^2 + y^4 - y^2$

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y) = (e^y + 2x + \cos x, xe^y + 1 + \cosh y)^T$.

(i) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt ohne es zu berechnen.

(ii) Man berechne ein Potential von $\boldsymbol{f}$.

b) Gegeben seien das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(y, -x, z^3\right)^T$ und der Körper

$$K = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \right\} .$$

(i) Man skizziere K.

(ii) Man berechne den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die Oberfläche von K.

Lösung:

a) (i) $\boldsymbol{f}$ besitzt ein Potential, denn es gilt $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(x,y) = e^y - e^y = 0$ und der $\mathbb{R}^2$ als Definitionsbereich von $\boldsymbol{f}$ ist einfach zusammenhängend.

(ii) Berechnung des Potentials $\Phi(x,y)$ durch Hochintegrieren:

$\Phi_x = e^y + 2x + \cos x \;\Rightarrow\; \Phi = xe^y + x^2 + \sin x + c(y)$

$\Phi_y = xe^y + 1 + \cosh y \stackrel{!}{=} xe^y + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 1 + \cosh y \Rightarrow c(y) = y + \sinh y + K$

$\Rightarrow\; \Phi(x,y) = xe^y + x^2 + \sin x + y + \sinh y + K$

b) (i)

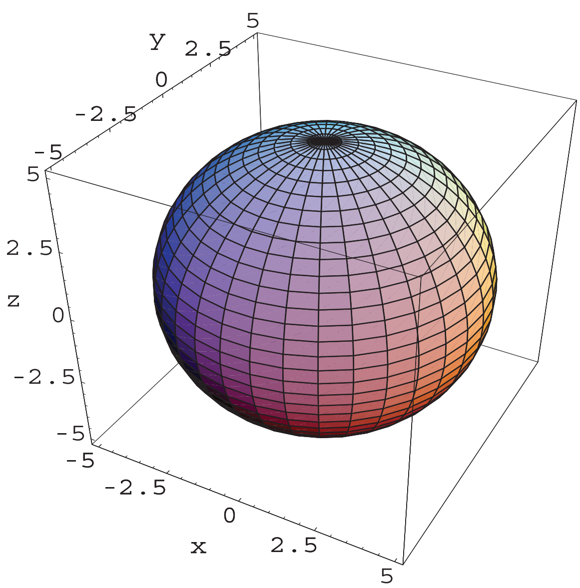


Bild 2 b): Kugel vom Radius $r = 5$

(ii) Nach dem Gausschen Integralsatz kann der Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die Oberfläche von K berechnet werden durch

$$\int_{\partial K} \boldsymbol{f}\, do = \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x,y,z)$$

Mit Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ -\pi/2 \le \psi \le \pi/2\,,\ 0 \le r \le 5$$

und $\operatorname{div}\boldsymbol{f} = 3z^2$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x,y,z) &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3r^2 \sin^2\psi r^2 \cos\psi\, d\psi d\varphi dr \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3\psi \,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi dr = \int_0^5 \int_0^{2\pi} 2r^4 d\varphi dr \\ &= \int_0^5 4\pi r^4 d\varphi dr = \frac{4\pi r^5}{5}\Big|_0^5 = 2500\pi \end{aligned}$$

Alternativ kann der Fluss auch direkt berechnet werden mit der Parametrisierung $\boldsymbol{p}$ der Kugeloberfläche ∂K:

$$\boldsymbol{p} : [0,2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \boldsymbol{p}(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} 5\cos\varphi\cos\psi \\ 5\sin\varphi\cos\psi \\ 5\sin\psi \end{pmatrix}$$

äußere Normale

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial\psi} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -5\sin\varphi\cos\psi & 5\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -5\cos\varphi\sin\psi & -5\sin\varphi\sin\psi & 5\cos\psi \end{vmatrix} = 25\cos\psi \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}$$

Fluss durch ∂K

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \boldsymbol{f}\, do &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 25\cos\psi \left\langle \begin{pmatrix} 5\sin\varphi\cos\psi \\ -5\cos\varphi\cos\psi \\ 5^3\sin^3\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \right\rangle d\psi d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5^5 \cos\psi \sin^4\psi d\psi d\varphi = 5^5 2\pi\, \frac{\sin^5\psi}{5}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2500\pi \end{aligned}$$