Aufgabe 1: Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Bestimmen Sie die Minima von} & f(x,y) \;=\; xy \\ \text{unter der Nebenbedingung} & g(x,y) = x^2+4y^2-8 \le 0\,. \end{array} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $x^2+4y^2-8<0$? Begründen Sie ihre Antwort.
(Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y)=xy$.)

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2+4y^2-8 = 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
(Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Aufgabe 2: Gegeben sei

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \le z \le 2,\; 0 \le x^2+y^2 \le z^2 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\; \boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ -xy^2 \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_R \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$

b) R ist berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein gewölbtes Flächenstück M . Geben Sie eine Parametrisierung von D an und berechnen Sie den Fluß von $\boldsymbol{f}$ durch D, also

$$\int_D \boldsymbol{f}(x,y,z)\, dO\,.$$

c) Wie groß ist nach a) und b) der Fluß durch den gewölbten Teil des Randes von R, also

$$\int_M \boldsymbol{f}(x,y,z)\, dO\,?$$

Viel Erfolg!