

Aufgabe 1) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x^2 + y^2 + \sin(x - y).$$

- Berechnen Sie Gradient und Hessematrix von f .
- Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- T_2 besitzt ein lokales Extremum. Berechnen Sie dieses Extremum und stellen Sie fest, ob es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum von T_2 handelt.
- Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in D := [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ gilt:

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| \leq 0.2$$

- Zeigen Sie mit Hilfe von Teil c) und d), dass der minimale Wert von f auf D nicht größer als -0.3 ist.

Lösung zu Aufgabe 1)

- (2 Punkte)

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x + \cos(x - y) \\ 2y - \cos(x - y) \end{pmatrix}, \\ \nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2 - \sin(x - y) & \sin(x - y) \\ \sin(x - y) & 2 - \sin(x - y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (2 Punkte)

$$T_2(x, y) = x^2 + y^2 + (x - y).$$

- (2 Punkte)

Notwendige Bedingung erster Ordnung:

$$\nabla T_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ 2y - 1 \end{pmatrix} = (0, 0)^\top$$

Daraus erhält man $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $y_1 = \frac{1}{2}$. (x_1, y_1) ist ein Minimum, da die Hessematrix

$$HT_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist .

d) (2 Punkte)

Die dritten Ableitungen lauten alle $\pm \cos(x - y)$, sind also betragsmäßig nach oben beschränkt durch $C := 1$.

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| = |R_2(x, y)| \leq \frac{2^3}{3!} \|(x, y)\|_\infty^3 C \leq \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 8} = \frac{1}{6} < 0.2$$

e) (2 Punkte)

$$T_2(x_1, y_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Nach Aufgabenteil c) wissen wir, dass gilt:

$$T_2(x_1, y_1) - 0.2 \leq f(x_1, y_1) \leq T_2(x_1, y_1) + 0.2$$

also $f(x_1, y_1) \leq -0.3$. Damit ist auch das Minimum von f kleiner als -0.3 .

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (x^2 - xy + y^2) d(x, y)$$

über

$$D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0\}.$$

Hinweise: Verwenden Sie Polarkoordinaten!

Es gilt $\sin(2\phi) = 2 \sin(\phi) \cos(\phi)$.

b) Gegeben seien die Vektorfelder $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie Potentiale zu \mathbf{f} und \mathbf{g} , falls dies möglich ist.

(ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x}.$$