# Integration über Flächen

04.02.

**Ziele:**

i) Flächeninhalt von Flächen im $\mathbb{R}^3$

ii) Integration von auf Flächen definierten Funktionen

iii) Flüsse von Vektorfeldern durch Flächen

Flächen beschreiben mit Hilfe von Parametrisierung: $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, $B \subset D$ regulärer Bereich und

$\bar{X} : D \to \mathbb{R}^3$ stetig diff'bares Vektorfeld

(1) Wir sagen, daß

$\bar{X}(B)$ Parametrisierung eines regulären Flächenstücks ist, falls

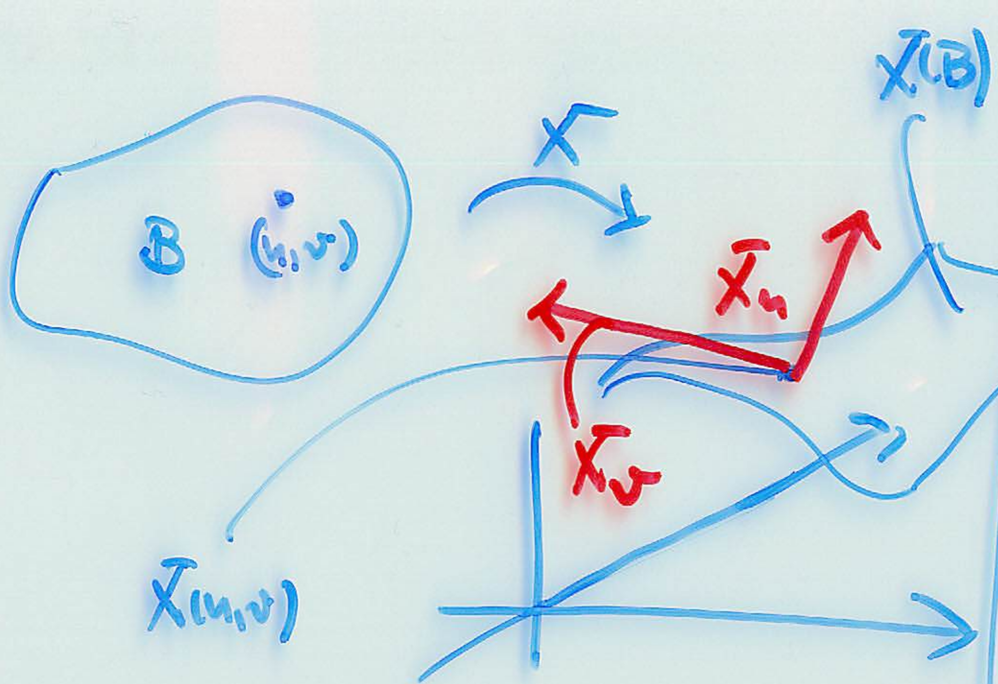
i) $\bar{X}$ injektiv

ii) $\bar{X}_u(u,v) \times \bar{X}_v(u,v) \neq 0$

$\forall (u,v) \in B$,

d.h. $\bar{X} = \bar{X}(u,v)$.

$S = \bar{X}(B)$ das von $\bar{X}$ dargestellte Flächenstück.




<u>Lokal</u>: Flächeninhalt angenähert durch Fläche des von $\vec{X}_u$ und $\vec{X}_v$ aufgespannten Parallelogramms

$$|\vec{X}_u \times \vec{X}_v|$$

$$= \vec{X}_u \cdot \vec{X}_v \sin\sphericalangle(\vec{X}_u, \vec{X}_v)$$

$$\sin \underset{=}{=} \sqrt{1-\cos^2} \quad \sqrt{|\vec{X}_u|^2 |\vec{X}_v|^2 - (\vec{X}_u \cdot \vec{X}_v)^2}$$

$$= \sqrt{E\,G - F^2}$$

mit metrischen Fundamentalgrößen

$$E(u,v) := |\vec{X}_u(u,v)|^2$$

$$F(u,v) := \vec{X}_u \cdot \vec{X}_v$$

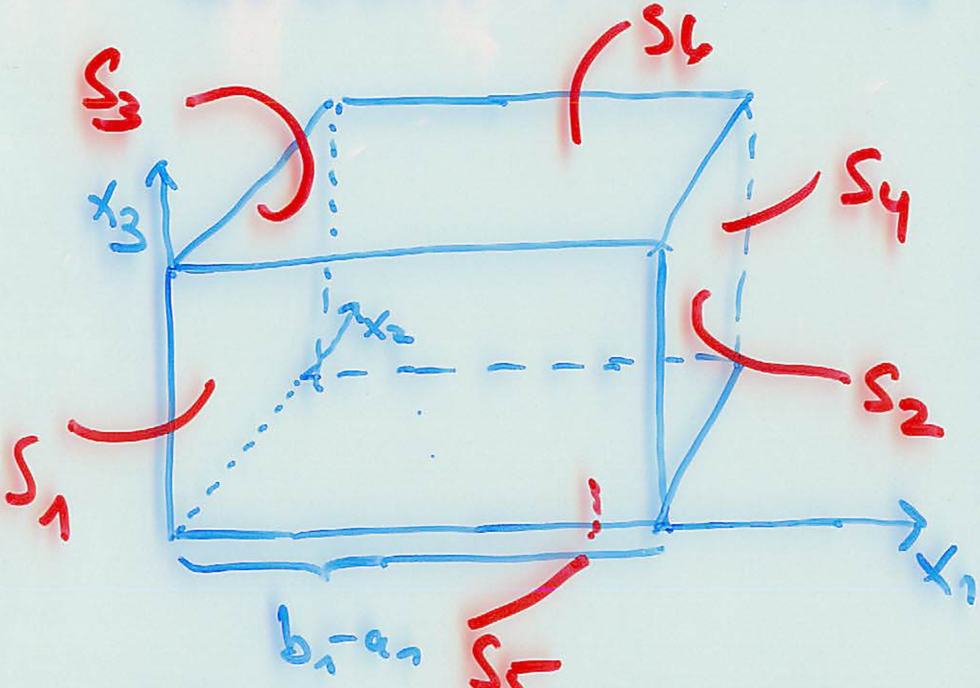
$$G(u,v) := |\vec{X}_v(u,v)|^2$$

Oberflächenintegral von $f: S \to \mathbb{R}$

$$\int_S f(\vec{x})\, d\sigma := \int_B f(\vec{X}(u,v))\, |\vec{X}_u(u,v) \times \vec{X}_v(u,v)|\, d(u,v)$$

Idee des Gauß'schen Integralsatz 040209

$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$




$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{bmatrix}$ Vektorfeld, welches "Stoff" transportiert

A: In $Q$ keine "Stoff"-Quellen oder -Senken

③ Daher: Transport von "Stoff" von und nach $Q$ geht nur über die Oberfläche von $Q$.

Beschreibe Oberfläche:

$S_1 = \{(a_1, x_2, x_3);\ a_2 \le x_2 \le b_2,\ a_3 \le x_3 \le b_3\}$

$S_2 = \{(b_1, x_2, x_3);\ \text{---}\}$

$S_3 = \{(x_1, a_2, x_3);\ a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_3 \le x_3 \le b_3\}$

$S_4 = \{(x_1, b_2, x_3);\ \text{---}\}$

$S_5 = \{(x_1, x_2, a_3);\ a_1 \le x_1 \le b_1,\ a_2 \le x_2 \le b_2\}$

$S_6 = \{(x_1, x_2, b_3);\ \text{---}\}$

Bilanz "Stoff"-Transport über $S_1, S_2$:

$\int_{S_1} F \cdot d\sigma + \int_{S_2} F \cdot d\sigma$

04.02.09

$$= \int_{S_1} F(x) \cdot (-e_1)\, d\sigma + \int_{S_2} F(x) \cdot e_1\, d\sigma$$

$$= -\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} F_1(a_1, x_2, x_3)\, dx_3\, dx_2 + \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} F_1(b_1, x_2, x_3)\, dx_3\, dx_2$$

1. Hauptsatz

$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} F_{1x_1}(x_1, x_2, x_3)\, dx_3\, dx_2\, dx_1$$

Analog über $S_3, S_4$:

$$\int_{S_3} F \cdot d\sigma + \int_{S_4} F \cdot d\sigma = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} F_{2x_2}(x_1, x_2, x_3)\, dx_3\, dx_2\, dx_1$$

(4) und über $S_5, S_6$:

$$\int_{S_5} F \cdot d\sigma + \int_{S_6} F \cdot d\sigma = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} F_{3x_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_3\, dx_2\, dx_1$$

Zusammengefasst:

$$\int_{\partial Q} F \cdot d\sigma = \sum_{j=1}^{6} \int_{S_j} F \cdot d\sigma$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} F_{1x_1}(x) + F_{2x_2}(x) + F_{3x_3}(x)\, dx$$

$$= \int_{Q} \operatorname{div} F(x)\, dx$$

Sei $F$ "Stoff"-Stromdichte 010209

Seien jetzt noch Quellen und Senken in $Q$ zugelassen mit Quellstärke $f(x)$.

Stofferzeugung in $Q$ durch Quellen und Senken:

$$\int_Q f(x)\,dx$$

Gesamtbilanz

$$\int_{\partial Q} F \cdot d\sigma = \int_Q f(x)\,dx$$

Gauß

$$\overset{\shortparallel}{\int_Q} \operatorname{div} F(x)\,dx$$

(5) Damit

$$\operatorname{div} F(x) = f(x) \quad \forall x \in Q$$

Phänomen: "Stoff" $\hat{=}$ Wärme.

Dann nach dem 1. Fourier'schen Gesetz:

Wärmestrom findet statt in Richtung des stärksten Temperaturgefälles und Stromstärke ist proportional zur Temperaturdifferenz

d.h.

$$F = -K\,\nabla T \quad (T \text{ Temperatur})$$

$$\Rightarrow \boxed{-\operatorname{div}(K\,\nabla T) = f}$$