d10109

$M \subset \mathbb{R}^n$ (Jordan) meßbare Punktmenge.

$Z_k = \{ M_j \subset \mathbb{R}^n ; j = 1, \dots, k \}$

heißt Zerlegung von M :$\Leftrightarrow$

i) M_j regulärer Bereich, d.h. M_j abgeschlossen und $\mathring{M}_j$ Gebiet

ii) $\bigcup_{j=1}^{k} M_j = M$

iii) $F(M_i \cap M_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

$\{Z_k\}$ heißt zulässig, falls

① $\lim_{k \to \infty} h(Z_k) = 0$, wobei

$h(Z) := \max \{ \mathrm{diam}(M_j), M_j \in Z \}$

Durchmesser: $\mathrm{diam}(M) = \sup \{ |x-y| ; x, y \in M \}$

$\{Z_k\}$ hier Folge von Zerlegungen, $h(Z)$ Gitterweite der Zerlegung.

<u>Def</u> <u>Riemann-Integral</u>:

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion, welche bis auf eine Nullmenge N stetig ist.

21.01.09

Sei Z Zerlegung von M,

$Z = \{ M_j ; j = 1, \dots, k \}$

Wähle $x_j \in M_j$ $(j = 1, \dots, k)$

(Zwischenpunkte)

$$S(f, Z) := \sum_{j=1}^{k} f(x_j)\, F(M_j)$$

Riemann'sche Zwischensumme

$\hat{=}$ Integral der Treppenfunktion

$$f_{\text{Treppe}}(x) := \sum_{j=1}^{k} f(x_j)\, \chi_{M_j}(x)$$

$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, Charakter. Funktion v. M.

② Es gilt: $\lim\limits_{k \to \infty} S(f, Z_k)$

existiert für jede zulässige Folge von Zerlegungen $\{Z_k\}$ von M und der Grenzwert ist unabhängig von der Zerlegungsfolge!

2 → Argumentation genauso, wie bei Konstruktion des R-Integrals für Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Riemann-Integral von f über M:

$$\int_M f(x)\, dx := \lim_{k \to \infty} S(f, Z_k)$$

21.01.09

Eigenschaften: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i.) $\int_M \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx$

$= \alpha \int_M f(x)\,dx + \beta \int_M g(x)\,dx$

Monotonie

ii) $f \leq g \Rightarrow \int_M f(x)\,dx \leq \int_M g(x)\,dx$

iii) Bereichsadditivität

$M = M_1 \cup M_2,\ F(M_1 \cap M_2) = 0$:

$\int_M f(x)\,dx = \int_{M_1} f(x)\,dx + \int_{M_2} f(x)\,dx$

iv.) Mittelwertsatz (f stetig!)

$\exists_{x^* \in M} : \int_M f(x)\,dx = f(x^*)\,F(M)$

③ Praktische Berechnung

1.) Produktintervalle

$a_i < b_i \quad (i = 1, \dots, n)$

$I := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ heißt n-dimensionales Produktintervall.

Integration geht wie folgt;

Seien $I_x \subset \mathbb{R}^p$, $I_y \subset \mathbb{R}^q$ Produktintervalle und

$I := I_x \times I_y$.

$f : I \to \mathbb{R}$ sei R-integrierbar

21.01.09

existiert

$$g(y) := \int_{I_x} f(x,y)\,dx \quad \forall_{y \in I_y},$$

So ist g auf I_y R-integrierbar und es gilt

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y)$$

$$= \int_{I_y} \Big(\underbrace{\int_{I_x} f(x,y)\,dx}_{g(y)} \Big)\,dy$$

Folgerung: $I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. Dann

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,d(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \Big(\dots \int_{a_2}^{b_2} \Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \Big)\,dx_2 \dots \Big)\,dx_n$$

(4) Dabei ist Reihenfolge der Integration beliebig vertauschbar.

<u>Bsp</u>: $I = [0,1]^3$, $f(x) = x_1 x_2 x_3$

$$\int_I f(x)\,dx = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 x_1 x_2 x_3\,dx_1}_{\frac{1}{2} x_2 x_3} \Big)\,dx_2 \Big)\,dx_3$$

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2} x_2 x_3\,dx_2}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x_3} \Big)\,dx_3 = \int_0^1 \frac{1}{4} x_3\,dx_3 = \frac{1}{8},$$

ii) $I := [0,1] \times [0, \frac{\pi}{4}]$, $f(x) = x_1 \cos(2x_2)$

$$\int_I f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 x_1 \cos(2x_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos(2x_2)\,dx_2 = \frac{1}{4} \sin(2x_2) \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

21.01.09

Integration über Normalbereiche

Seien $g, h: B \in \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$

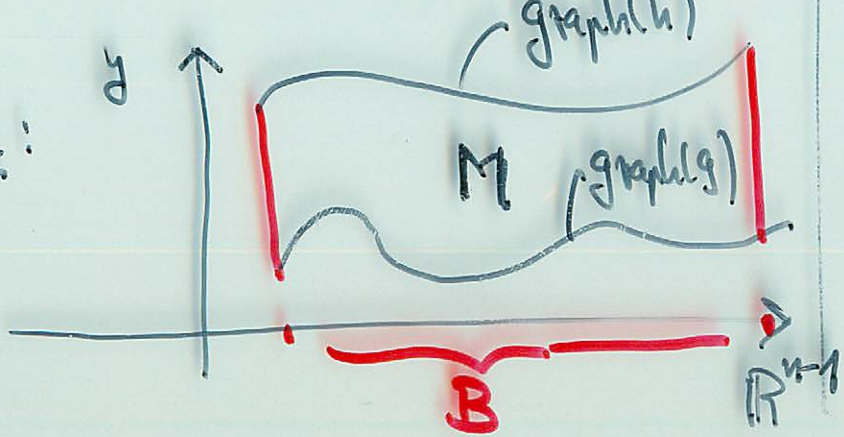
stetig und

$$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^n ;\ x \in B \text{ und } g(x) \le y \le h(x) \}$$

Dann gilt

$$\int_M f(x,y)\, d(x,y) = \int_B \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Skizze:



(5) Bsp 1) $M = \{ x \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \le x_1 \le 1,\ x_1 \le x_2 \le \sqrt{x_1} \}$

$B = [0,1]$, $g(z) = z$, $h(z) = \sqrt{z}$

$$\int_M x_1 x_2\, dx = \int_0^1 \int_{x_1}^{\sqrt{x_1}} x_1 x_2\, dx_2\, dx_1$$

$$= \int_0^1 x_1 \frac{1}{2} x_2^2 \Big|_{x_1}^{\sqrt{x_1}} dx_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^2 - x_1^3\, dx_1 = \frac{1}{24}$$

Bsp 2) (s. S. 618 Bärwolff)

Berechne

$$\int_E x_1^2 + x_2^2\, d(x_1, x_2, x_3) \quad \text{mit}$$

21 01 09

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ;\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Ellipsoid mit Halbachsen a, b, c.

Es gilt

$$E = \left\{ (x_1, x_2, y) ;\ -c\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}} \leq y \leq c\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}} ,\ (x_1, x_2) \in \tilde{E} \right\}$$

$$\tilde{E} = \left\{ (x_1, x_2) ;\ -a \leq x_1 \leq a ,\ -b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} \leq x_2 \leq b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} \right\}$$

Damit

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\tilde{E}} \int_{-c\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}}} x_1^2 + x_2^2 \, dx_3 \, d(x_1, x_2)$$

b

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}} \int_{-c\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}}} x_1^2 + x_2^2 \, dx_3 \, dx_2 \, dx_1$$

$$= \frac{4}{15} \pi abc (a^2 + b^2)$$

Substitutionsregel

$g : \mathbb{R}^n \supset G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, injektiv, $\det Dg(x) > 0$ oder $\det Dg(x) < 0$ für alle $x \in G$. $T \subset G$ kompakt, (Jordan) meßbar und $f : g(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann $g(T)$ (Jordan)-meßbar, f auf $g(T)$ R-integrierbar mit

$$\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f(g(t))\, |\det Dg(t)|\, dt$$

210109

$n=1$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$

mit $\phi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$.

Bsp.: Polarkoordinaten in der Ebene

$R := \{(r,\varphi) \,;\, r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}$

$g : R \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\quad g(r,\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$

$\det D_{(r,\varphi)}\, g(r,\varphi) = r$. Sei

$T := [\rho, R] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ mit

$0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$

Kreisringsegment. $M := g(T)$

(7) Dann gilt

$$\int_M f(x)\,dx$$

$$= \int_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

2. Bsp. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 = r^2$

$$\rightarrow \int_M f(x)\,dx$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_\rho^R r^2 \cdot r\, dr\, d\varphi$$

$$= (\varphi_2 - \varphi_1)\ \frac{1}{3}\, r^3 \Big|_\rho^R \quad \checkmark$$