10.12.08

notwendige & hinreichende Bed. 2ter Ordnung für Extremstellen unter NBen:

$f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, $h: D \to \mathbb{R}^m$,

$m \le n$, f, h 2x stetig diffb.

und $\operatorname{rang} h(x) = m \quad \forall x \in D$

i.) $x_0 \in M := \{x \in D;\ h(x) = 0\}$ lokale Minimalstelle von f auf M. Dann

$\nabla_{xx} L(x_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ pos. semidefinit auf

$\ker Dh(x_0) = \{w \in D;\ Dh(x_0) w = 0\}$,

1 d.h.

$$w^t \nabla_{xx} L(x_0, \mu_1, \dots, \mu_m)\, w \ge 0 \quad \forall w \in \ker Dh(x_0).$$

Dabei ist $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m]$ der zugehörige Lagrange Multiplikator.

ii) (hinreichende Bed.)

x_0 erfülle zusammen mit $\mu \in \mathbb{R}^m$

$$\nabla f(x_0) + Dh(x_0)^t \mu = 0 .$$

Gilt dann

$$w^t \nabla_{xx} L(x_0, \mu)\, w > 0 \quad \forall w \in \ker Dh(x_0),\ w \ne 0,$$

so ist x_0 lokales Min von f auf M.

101208

Beachte: x_0 Maximum, falls

$-\nabla_{xx} L(x_0, \mu)$ pos. def. auf

$\ker Dh(x_0)$!

Bsp: $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4$

$h(x) = x_1^2 - x_2 - 2$

$m = 1$, $n = 2$

$L(x, \mu) = f(x) - \mu h(x)$

$$\nabla L(x,\mu) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2\mu x_1 \\ 6x_2 + \mu \\ -(x_1^2 - x_2 - 2) \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{xx} L(x,\mu) = \begin{bmatrix} 2-2\mu & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

② Extremstellen

$\mu = +1$: $P_1\left(\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right)$, $P_2\left(-\sqrt{\frac{11}{6}}, -\frac{1}{6}\right)$

$\mu = 12$: $P_3(0, -2)$

Zunächst P_3: $Dh(x) = [2x_1 \quad -1]$

$\ker Dh(P_3) = \{ w \in \mathbb{R}^2 ; \; Dh(P_3) w = 0 \}$

$= \{ w \in \mathbb{R}^2 ; \; [2 \cdot 0 \quad -1] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = -w_2 = 0 \}$

$\hat{=}$ x_1- Achse

$$\nabla_{xx} L(P_3, \mu = 12) = \begin{bmatrix} -22 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$w \in \ker Dh(P_3) \Rightarrow w = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, also

$w^t \nabla_{xx} L(P_3, \mu = 12) w = -22 w_1^2 < 0$, $w \neq 0$.

10.12.08

also $-\nabla_{xx} L(P_3, \mu = 12)$ pos. definit $\rightarrow$ P_3 lokal maximal.

<u>P_1, P_2</u>: $\ker Dh(P_1) = \{ w \in \mathbb{R}^2 ;$

$2\sqrt{\frac{11}{6}}\, w_1 = w_2 \}$,

$$\nabla_{xx} L(P_1, \mu = 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

$$[w_1, w_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{w \in \ker Dh(P_1)}{=} \left[w_1, 2\sqrt{\tfrac{11}{6}}\, w_1 \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ 2\sqrt{\frac{11}{6}}\, w_1 \end{bmatrix}$$

$$= 44\, w_1^2 > 0 \quad , w_1 \neq 0$$

③ Damit P_1 Minimalstelle (lokal)

Ähnlich für P_2:

$\ker Dh(P_2) = \{ w \in \mathbb{R}^2 ; -2\sqrt{\frac{11}{6}}\, w_1 = w_2 \}$

$w \in \ker Dh(P_2)$:

$$w^t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} w = 44\, w_1^2 > 0 \quad , w_1 \neq 0$$

$\rightarrow$ P_2 Minimalstelle (lokal).

<u>Bsp</u>: $f(x) = x^t A x$, A sym., pos. def.

$M = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \; |x|^2 - 1 = 0 \}$ Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$

$\min f(x)$, $x \in M$ hat Lagrange-Funktion $(m = 1)$

$$L(x, \mu) = x^t A x - \mu \overbrace{(|x|^2 - 1)}^{h(x)}$$

10.12.08

$\nabla L(x,\mu) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2Ax = 2\mu x \\ |x|^2 = 1 \end{cases},$$

d.h. x EV von A zu μ

$Dh(x) = 2x^t = 2[x_1, \dots, x_n]$

$\ker Dh(x) = \{ w \in \mathbb{R}^n ; \; x^t w = 0 \}$

$w^t \nabla_{xx} L(x,\mu) w$

$= 2 w^t A w - 2 x^t A x |w|^2 \overset{!}{>} 0 \quad \forall w \in \ker Dh(x)$

erfüllt, falls μ kleinster EW von A und x zugeh. EV.

(4) Es gilt dann $\mu = x^t A x$

Wichtige Aufgabe bei Bestimmung von Extremstellen: Nullstellenbestimmung

$\underbrace{\nabla f(x)}_{\in \mathbb{R}^n} = 0$ (unrestringierte Min/Max Aufgabe)

$\underbrace{\nabla L(x,\mu)}_{\in \mathbb{R}^{n+m}} = 0$ (restringierte Min/Max Aufgabe)

Nullstellensuche bei Vektorfunktionen!

101208

Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \quad f_i : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$$

Aufgabe: Finde $x^* \in D$ mit

$$F(x^*) = 0$$

Motivation für Lösungsalgorithmus:

x nahe bei x^*; Taylorformel

$$0 = F(x^*) = \underbrace{F(x) + DF(x)(x^* - x)}_{\text{lineares Modell}} + R$$

5 Damit gilt in "erster Näherung"

$$DF(x)\, x^* \doteq -F(x) + DF(x)\, x$$

Falls $DF(x)$ invertierbar, dann

$$x^* \doteq x - DF(x)^{-1} F(x)$$

Die Nullstelle x^* ist Fixpunkt der Funktion

$$G(x) := x - DF(x)^{-1} F(x),$$

denn $G(x^*) = x^*$ gdw $F(x^*) = 0$, falls $DF(x^*)^{-1}$ ex.

Idee: x^0 gute Näherung von x^*. Dann liefert Fixpunkt-Iteration für G mit Startwert x^0

10.12.08

(hoffentlich) eine Folge (x^k), welche gegen Fixpunkt x^* von G und damit gegen eine Nullstelle von F.

Das liefert

Algorithmus (Newton-Verfahren)

$F: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ geg.

i.) $k=0$

ii) Löse lineares Gleichungss.

$$DF(x^k)\,\delta x^k = -F(x^k)$$

iii) $x^{k+1} := x^k + \delta x^k$

iv.) $k=k+1$, gehe zu ii).

⑥ Beachte: Alg äquivalent zur Fixpunkt-Iteration x^0 geg, $k=0$

$$x^{k+1} = G(x^k) = x^k - DF(x^k)^{-1}F(x^k),$$

falls $DF(x^k)^{-1}$ ex. Denn ii) meint

$$x^{k+1} = x^k + \delta x^k$$
$$= x^k - DF(x^k)^{-1}F(x^k) = G(x^k).$$

Bemerkungen:

a.) Schritt ii) erfordert Lösung eines LGS

b) Alg. nur durchführbar, falls $DF(x^k)$ invertierbar, denn nur dann δx^k eindeutig bestimmt

c.) $\delta x^k \mathrel{\hat{=}} x^{k+1} - x^k$

d) NIEMALS $DF(x^k)^{-1}$ ausrechnen!

101208

Eigenschaften & Konvergenz des Newton-Verfahrens

$F: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $x^* \in D$ mit $F(x^*) = 0$ und $DF(x^*)$ sei regulär. Dann gibt es Umgebung $K_r(x^*) \subset D$, s.d. unser Alg. für jeden Startwert $x^0 \in K_r(x^*)$ eine Folge (x^k) mit

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$$

erzeugt. Ferner gilt mit einem $C > 0$:

$$|x^k - x^*| \le C\,|x^{k-1} - x^*|^2,$$

7

d.h. Konvergenz ist quadratisch. Darüber hinaus gilt

$$|x^k - x^*| \le |F(x^k)| \sup_{x \in K_r(x^*)} \|DF(x)^{-1}\| .$$

Hier $\displaystyle \|A\| := \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ |v| = 1}} |Av|$ zugehörige Matrixnorm.

Bsp: $$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 - \frac{1}{40}x_1^2 - \frac{2}{25}x_2^2 + \frac{1}{2} \\ -3x_1 + x_2 - \frac{1}{20}x_1^2 - \frac{1}{100}x_2^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$n = 2$

Ziel: Finde x^* mit $F(x^*) = 0$

Newton mit $x^0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ liefert

wegen

$$DF(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{20}x_1 & -2 - \frac{4}{25}x_2 \\ -3 - \frac{1}{10}x_1 & 1 - \frac{1}{50}x_2 \end{bmatrix}$$

10.12.08

$$DF(x^0)\,\delta x^0 = -F(x^0) \quad \text{gdw}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{39}{40} & -\frac{52}{25} \\ -\frac{61}{20} & \frac{99}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1^0 \\ \delta x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{800} \\ -\frac{3}{200} \end{bmatrix}.$$

$$x^1 = x^0 + \delta x^0 = \begin{bmatrix} 0.4889402 \\ 0.4821955 \end{bmatrix}$$

Für $x^* = \begin{bmatrix} 0.4893594 \\ 0.4823787 \end{bmatrix}$

ergibt sich

$$x^* - x^1 = \begin{bmatrix} 0.0004192 \\ 0.0001832 \end{bmatrix},$$

d.h. x^1 sehr gute Näherung von x^*!

(8)

Bsp: Berechnung normierter EV von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ziel: finde Eigenwert λ und Eigenvektor x mit $|x| = 1$.

Dazu $u := (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und

$$F(u) := \begin{bmatrix} Ax - \lambda x \\ |x|^2 - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow DF(u) =$$

$$= \begin{bmatrix} A - \lambda I & -x \\ 2x^t & 0 \end{bmatrix}$$

Newton Verfahren: $u^0 = \begin{bmatrix} x^0 \\ \lambda^0 \end{bmatrix}$, bestimme

$$\begin{bmatrix} A - \lambda^k E & -x^k \\ 2{x^k}^t & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x^k \\ \delta \lambda^k \end{bmatrix}}_{= \delta u^k} = \begin{bmatrix} \lambda^k x^k - A x^k \\ 1 - |x^k|^2 \end{bmatrix}$$

$$u^{k+1} = u^k + \delta u^k.$$