11.11.08

Diffbarkeit. $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$

heißt bei $x_0 \in D$ diffbar, falls

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R(x)$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|R(x)|}{|x - x_0|} = 0$

Notation, $f'(x_0) \equiv Df(x_0)$ heißt Ableitung von f bei x_0

Bsp: $m = 1$, $f(x) = x^t A x$

mit A $n \times n$-Matrix, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

① Beh.: $f'(x_0) = [(A + A^t) x_0]^t$

$= x_0^t (A + A^t)$

2 Möglichkeiten

i) $f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j$

Berechne $\nabla f(x)$ und setze $f'(x_0) = \nabla f(x_0)^t$. Dann nachweisen, dass $f'(x_0)$ die Ableitung darstellt.

ii) Nachrechnen der Darstellung $x = x_0 + \xi$. Dann gilt

$f(x) = (x_0 + \xi)^t A (x_0 + \xi) =$

12.11.08 ②

$$= \underbrace{x_0^t A x_0}_{} + x_0^t A \xi + \underbrace{\xi^t A x_0}_{x_0^t A^t \xi} + \xi^t A \xi$$

$$= f(x_0) + (x_0^t A + x_0^t A^t)\xi + \xi^t A \xi$$

$$= f(x_0) + x_0^t (A + A^t)\underbrace{\xi}_{x - x_0} + \xi^t A \xi$$

$$= f(x_0) + \underbrace{x_0^t (A + A^t)}_{Df(x_0)}(x - x_0) + \underbrace{\xi^t A \xi}_{k(x)}$$

Zeige: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{|k(x)|}{|x - x_0|} = 0$

Beachte: $k(x) = (x - x_0)^t A (x - x_0)$

Damit

$$\frac{|k(x)|}{|x - x_0|} = \frac{|(x - x_0)^t A (x - x_0)|}{|x - x_0|}$$

$$\leq \frac{|x - x_0|\,|A(x - x_0)|}{|x - x_0|}$$ mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\to |A(x - x_0)| .$$

Daher

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|k(x)|}{|x - x_0|} \leq \lim_{x \to x_0} |A(x - x_0)| = 0$$

Damit ist alles gezeigt!

$$\text{Hess } f(x) = A + A^t = (A + A^t)^t ,$$

also immer symmetrisch!

Rechenregeln für Ableitungen

i.) $f: D \to \mathbb{R}^m$, $g: D \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $\alpha f + \beta g$ in x_0 diffbar mit

$$D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0),$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

121108

iii) Kettenregel. $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^p$,

$g: A \to B$, $f: B \to \mathbb{R}^m$,

g sei in $x_0 \in A$ diffbar, f sei in $z_0 = g(x_0)$ diffbar. Dann ist

$$f \circ g : A \to \mathbb{R}^m$$

diffbar mit

$$D(f\circ g)(x_0) = Df(z_0)\, Dg(x_0)$$

$$= Df(g(x_0))\, Dg(x_0)$$

$$\begin{tikzcd}
x_0 \in A \subset \mathbb{R}^n \arrow[rr, "f\circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathbb{R}^m \ni f(z_0) \\
& \begin{array}{c} g(x_0) \in B \\ = z_0 \end{array} \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

③ Bsp: i.) $f(z) = z_1 \cdot z_2$, d.h. $m=1$

und $p=2$, $g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

also auch $n=2$. Dann gilt

für $y(x) := f(g(x)) = x_1 \cdot x_2$

mit $Dy(x) = [x_2, x_1]$

$$Dg(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Df(z) = [z_2\ z_1] \Rightarrow Df(g(x)) = [x_2\ x_1]$$

$$\Rightarrow D(f\circ g)(x) = Df(g(x))\, Dg(x)$$

$$= [x_2\ x_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_2\ x_1]$$

$$= Dy(x)$$

12.11.08

ii) $g(x) = x_1^2 \sin x_2$, $f(z) = \begin{bmatrix} \cos z \\ z^3 \end{bmatrix}$

$h(z) := g(f(z)) = \cos^2 z \sin z^3$

$\rightarrow h'(z) = -2\cos z \sin z \sin z^3$
$+ 3z^2 \cos^2 z \cos z^3$

$= Dg(f(z))\, Df(z)$

$= \begin{bmatrix} 2\cos z \sin z^3, & \cos^2 z \cos z^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin z \\ 3z^2 \end{bmatrix}$

Dabei benutzt ✓

$Dg(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \sin x_2, & x_1^2 \cos x_2 \end{bmatrix}$

$f'(z) = \begin{bmatrix} -\sin z \\ 3z^2 \end{bmatrix}.$

(4) Richtungsableitungen

$f: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$|a| = 1$ (Länge von $a = 1$)

Existiert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0 + ha) - f(x_0) \right) =: \partial_a f(x_0)$$

so heißt $\partial_a f(x_0)$ Richtungsableitung von f bei x_0 in Richtung a

Beachte: $a = e_i$, dann

$\partial_a f(x_0) = f_{x_i}(x_0) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0)$

Merke: $\nabla f(x_0)^t a = \partial_a f(x_0)$

Notation $\partial_a f(x_0) \equiv \frac{\partial}{\partial a} f(x_0)$

12.11.08

Nachweis von Merke

$g(h) := x_0 + ha \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Dann

$$\partial_a f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(g(h)) - f(g(0)) \right)$$

$$= z'(0),$$

wobei $z(h) = f(g(h)) \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

<u>Kettenregel</u>:

$$z'(0) = Df(g(0))\, Dg(0)$$

$$= \nabla f(x_0)^t\, a$$

weil $x_0 = g(0)$ und $g'(h) = a$.

(5) Anwendung der Kettenregel

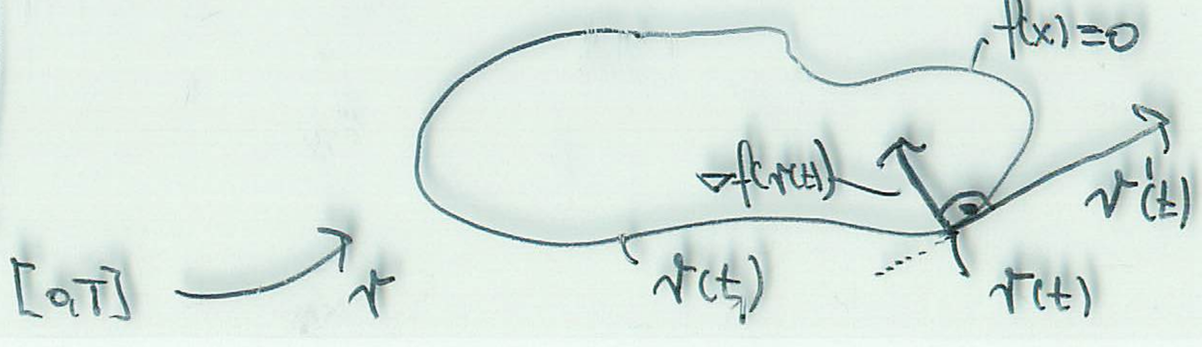
„Gradient steht senkrecht auf Niveau"

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$N_f(c_1) = \{ x \in \mathbb{R}^n ; \; f(x) = c_1 \}$$

Niveau von f zum Wert c_1

$n = 2$: $f(x) = c_1$ ist Kurve, d.h. $N_f(c_1)$ ist Bild einer Kurve $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^2$



12.11.08

Es gilt $f(\gamma(t)) = c$,

also konstant. Damit

$$0 = \frac{d}{dt} c = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} Df(\gamma(t))\,\gamma'(t)$$

$$= \nabla f(\gamma(t))^t \underbrace{\gamma'(t)}_{\text{tangential an } N_f(c)}$$

d.h. $\nabla f(\gamma(t)) \perp$ Niveau.

Taylor Formel für

Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$

Zunächst Notationen

(6)

i.) $\dfrac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} f(x) = f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}(x)$

ii) $\nabla := \left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right]^t$

Nabla - Operator

iii) $h \in \mathbb{R}^n$, $h = [h_1, \dots, h_n]^t$. Dann

α.) $h \cdot \nabla := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Differentialoperator

β.) $m \in \mathbb{N}$

$$(h \cdot \nabla)^m := \underbrace{\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}}_{n^m \text{ Summanden}}$$

Differentialoperator

121108

(7)

iv.) $[a, a+h] := \{x = a + th,\ t \in [0,1]\}$

Verbindungsstrecke der Punkte a und $a+h$.

Motivation Taylorformel mit Hilfe von Funktionen einer reellen Veränderlichen

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto g(t)$

$k+1$ - mal stetig diffbar. Dann

$$g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} g''(t_0)(t-t_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} g^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} g^{(k+1)}(t_0 + s(t-t_0))\, ds\, (t-t_0)^{k+1}$$

Anwenden auf die Situation

$f(a+h) = f(a) + \dots\dots$?

mit $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ und $[a, a+h] \subset D$.

Dazu setze $g(t) := f(a+th)$

mit $t \in [0,1]$ bzw Umgebung$([0,1])$

Dann g Funktion einer reellen Veränderlichen und es gilt

$g(1) = f(a+h), \quad g(0) = f(a)$

$$f(a+h) = g(1) = \underbrace{g(0)}_{f(a)} + g'(0)(1-0) + \frac{1}{2} g''(0)(1-0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} g^{(k+1)}(s)\, ds\, (1-0)^{k+1}$$

12.11.08

Verbleibt Berechnung von

$g'(0),\ g''(0),\ \dots,\ g^{(k)}(0)$,

$g^{(k+1)}(s)$.

$$g(t) = f(a+th) \xrightarrow[\text{regel}]{\text{Ketten}}$$

$$g'(t) = Df(a+th)h$$

$$\rightarrow g'(0) = Df(a)h = \nabla f(a)^t h$$

$$= (h\cdot\nabla)\, f(a)$$

$$g''(t) = D^2 f(a+th)hh$$

$$g''(0) = D^2 f(a)hh$$

$$= (h\cdot\nabla)^2 f(a)$$

$$= h^t \operatorname{Hess} f(a)\, h$$

8

Schliesslich

$$g^{(k)}(0) = (h\cdot\nabla)^k f(a)$$

Damit ergibt sich

<u>Taylorformel</u> <u>im</u> $\mathbb{R}^n$

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ $k+1$-mal stetig partiell diffbar, $[a, a+h] \subset D$.

Dann gilt

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} (h\cdot\nabla)^j f(a) + \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} (h\cdot\nabla)^{k+1} f(a+sh)\, ds}_{=:\, R(a,h)}$$

mit

12.11.08

$$|R(a,h)| \leq \frac{|h|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{0\leq s\leq 1} \left(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}=1}^{n} | f_{x_{i_1} \ldots x_{i_{k+1}}}(a+sh)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

<u>Def</u>: Taylorpolynom k-ten Grades von f bei a ist gegeben durch

$$T_k(a+h) := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} (h\cdot\nabla)^j f(a)$$

Die Fälle $k=1$ und $k=2$

<u>$k=1$</u> $f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j f_{x_j}(a) + R(a,h)$

9 Damit beschreibt die Abbildung

$$h \mapsto (h\cdot\nabla) f(a) = \sum_{j=1}^{n} h_j f_{x_j}(a) = T_1(a+h) - f(a)$$

den Tangentialraum des Graphen von f an der Stelle a.