051103

1

Diffbarkeit im $\mathbb{R}^n$

$$f_{x_j}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h e_j) - f(x)}{h}$$

wobei $e_j = (0, \dots 0, \underset{\uparrow \, j\text{-te Komponente}}{1}, 0, \dots, 0)^t$

$$g(z) := f(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$g'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

$$\equiv f_{x_j}(x)$$

__Beachte__: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für g wissen wir, wie Differenzieren geht.

__Wichtig__: $f : D \to \mathbb{R}$ partiell diffbar, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt

$$\nabla f(x) := \begin{bmatrix} f_{x_1}(x) \\ f_{x_2}(x) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Gradient von f (in D).

Bezeichnung

$$\underset{\sim}{\nabla} f(x) \equiv \operatorname{grad} f(x)$$

Nabla-Operator

Bsp $f(x) = x_1 \sin x_1 \cos(x_2 x_3)$

$$f_{x_1}(x) = (\sin x_1 + x_1 \cos x_1) \cos(x_2 x_3)$$

$$f_{x_2}(x) = x_1 \sin x_1 (-x_3 \sin(x_2 x_3))$$

$$f_{x_3}(x) = x_1 \sin x_1 (-x_2 \sin(x_2 x_3))$$

$$\nabla f(0) = \begin{bmatrix} f_{x_1}(0) \\ f_{x_2}(0) \\ f_{x_3}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Höhere partielle Ableitungen

Sei f partiell diffbar. Existiert dann

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f_{x_j}(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_j}(x+he_i) - f_{x_j}(x)}{h}$$

so ist f an der Stelle x 2 mal partiell bzgl. x_i diffbar

Notation

$$f_{x_i x_j}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i}(f_{x_j}(x)) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Verallgemeinerung auf k-mal partiell diffbar liegt auf der Hand

$$f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}$$

mit Indizes $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

05.11.08

Bsp: $f(x) = x_1 \sin x_1 \cos(x_2 x_3)$

$$f_{x_1}(x) = (\sin x_1 + x_1 \cos x_1) \cos(x_2 x_3)$$

$$f_{x_2 x_1}(x) = -(\sin x_1 + x_1 \cos x_1)\, x_3 \sin(x_2 x_3)$$

$$f_{x_2}(x) = -x_1 \sin x_1 \; x_3 \sin(x_2 x_3)$$

$$f_{x_1 x_2}(x) = -(\sin x_1 + x_1 \cos x_1)\, x_3 \sin(x_2 x_3)$$

$$= f_{x_2 x_1}(x)$$

Satz von Schwarz über Vertauschbarkeit der Reihenfolge bei partiellen Differenzieren

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar.

(3) Dann gilt

$$f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}(x) = f_{x_{\pi(i_1)} \cdots x_{\pi(i_k)}}(x)$$

für jede Permutation π der Zahlen $i_1, \dots, i_k$.

D.h. dass die Reihenfolge des partiellen Differenzierens unerheblich ist!

Bsp., für welches Satz von Schwarz nicht anwendbar ist:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist f stetig in $x = 0$.

Denn mit $\lim_{\substack{k\to\infty \\ x^k \neq 0}} x^k = 0$

gilt
$$|f(x^k)| \leq |x_1^k|\,|x_2^k| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$

$$f_{x_1}(x) = x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2} + x_1 x_2 \frac{4x_1 x_2^2}{|x|^4}$$

$$f_{x_2}(x) = x_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^2} - x_1 x_2 \frac{4x_2 x_1^2}{|x|^4}$$

Damit

$$|f_{x_1}(x)| \leq |x_2| + 2|x_1| \xrightarrow{x\to 0} 0$$
$$|f_{x_2}(x)| \leq |x_1| + 2|x_2| \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$f_{x_1}(0, x_2) = -x_2, \quad f_{x_2}(x_1, 0) = x_1$$

Damit gilt

$$f_{x_2 x_1}(0,0) = -1 \neq f_{x_1 x_2}(0,0) = 1$$

f nicht stetig 2x partiell diffbar.

Hesse-Matrix: Sei $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ 2 mal partiell diffbar, $x \in D$ (offen)

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) & \cdots & f_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & f_{x_nx_2}(x) & \cdots & f_{x_nx_n}(x) \end{bmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt Hesse Matrix von f bei $x \in D$. $H_f(x)$ ist $n \times n$ Matrix.

051108

Merke: Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig partiell diffbar auf D (offen). Dann ist $H_f(x)$ symmetrisch, d.h.

$$H_f(x) = H_f(x)^t .$$

Bsp: $f(x) = x_1^2 \ln x_1 + x_2 x_3 + x_1 x_2$ für $x_1 > 0$

Dann gilt

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 3 + 2\ln x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = H_f(x)^t$$

(5) Vektorwertige Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ Vektorfeld}$$

f heißt (stetig) partiell diffbar gdw f_j $(j = 1, \dots, m)$ (stetig) partiell diffbar. Die Matrix

$$Df(x) := \begin{bmatrix} f_{1x_1}(x) & f_{1x_2}(x) & \dots & f_{1x_n}(x) \\ f_{2x_1}(x) & f_{2x_2}(x) & \dots & f_{2x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{mx_1}(x) & f_{mx_2}(x) & \dots & f_{mx_n}(x) \end{bmatrix}$$

05.11.08

$$= \begin{bmatrix} \nabla f_1(x)^t \\ \vdots \\ \nabla f_m(x)^t \end{bmatrix}$$ heißt Jacobi-Matrix

von f. $Df(x) \in \mathbb{R}^{m,n}$, d.h. $m \times n$-Matrix

Beachte: $f: D \to \mathbb{R}$, d.h. $m=1$.

Dann

$Df(x) = \nabla f(x)^t$ $1 \times n$-Matrix

Totale Differenzierbarkeit

$f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$, D offen.

f heißt in $x_0 \in D$ diff'bar

(b) gdw

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x-x_0) + R(x)$$

lineares Modell von f bei x_0

für $x \in K_r(x_0)$, wobei $R: K_r(x_0) \to \mathbb{R}^m$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|R(x)|}{|x-x_0|} = 0$$ erfülle.

Vergleiche Tangentenmodell bei Funktionen einer reellen Veränderlichen

Bsp: $f(x) := x^t A x$, A $n \times n$ Matrix,

d.h. $x \in \mathbb{R}^n$, $m = 1$

$$Df(x_0) = \left[(A + A^t)x_0\right]^t$$